

LIBRARY OF  
MICHIGAN STATE NORMAL  
COLLEGE

1911.

No. 13.

# ANNALEN DER P H Y S I K.

HERGEFÜHRT UND FORTGEFÜHRT DURCH

H. A. C. SIEGEN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. V. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 36. Heft 3.

DER GANZEN REIHE 341. BANDES 3. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1911.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.  
DÖRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen; von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in  
15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.*

*(Ausgegeben am 9. November 1911.)*

# Inhalt.

	Seite
1. Hans Hess. Über die Plastizität des Eises . . . . .	449
2. G. Herglotz. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie . . . . .	493
3. A. Joffé. Zur Theorie der Strahlungserscheinungen . . . . .	534
4. Hermann Zahn. Über scheinbaren Halleffekt bei hochfrequenten Wechselströmen und ein hierauf beruhendes empfindliches Nullinstrument . . . . .	553
5. Paul Cermak und Hans Schmidt. Die thermoelektrischen Kräfte beim Übergang vom festen zum flüssigen Aggregatzustande . . . . .	575
6. A. Goldmann und S. Kalandyk. Lichtelektrische Untersuchungen an festen Dielektriken . . . . .	589
7. R. H. Weber. Die Magnetisierbarkeit der Oxyd- und Oxydulsalze der Eisengruppe . . . . .	624
8. Wilhelm Rühl. Über die Schallintensität des tönenden Lichtbogens . . . . .	647

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Plecherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweiteriger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

**Zitate** sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.







## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 36.

1. *Über die Plastizität des Eises;*  
*von Hans Hess.*

Gelegentlich eines Vortrages über „Probleme der Gletscherkunde“<sup>1)</sup> konnte ich über die vorläufigen Ergebnisse einer Versuchsreihe berichten, die ich 1906 als eine Art Fortsetzung früherer Untersuchungen<sup>2)</sup> ausgeführt habe. Der Zweck der Versuche von 1906 war die Erkundung der Ursache davon, daß die Ausflußgeschwindigkeit des Eises bei konstantem Druck und konstanter Temperatur stetig wächst; er wurde aber damals nicht erreicht. Zur Fortsetzung der Versuche wurde mir 1908 vom Kgl. bayr. *Staatsministerium* ein besonderer Betrag für Anschaffung von Preßformen, Umgestaltung der hydraulischen Presse usw. genehmigt. Außerdem erhielt ich durch Hrn. Brauereibesitzer K. Hürner in Ansbach die Gelegenheit, die Arbeiten im Kühlraum seiner Brauerei auszuführen. Nach beiden Stellen bin ich zu besonderem Danke verpflichtet, den ich auch hier gerne erstatte.

Die verwendete hydraulische Presse ist eins der größeren Instrumente dieser Art, die für den Unterricht gebraucht werden. Sie hat 46,4 mm Kolbendurchmesser, eine Hubhöhe von 18 cm und ist mit einem bis 350 kg/cm<sup>2</sup> zeigenden Manometer (Schäfer & Budenberg-Magdeburg) ausgestattet. Dies Manometer wurde 1908 vor und nach der Versuchsreihe, über deren Ergebnisse hier berichtet werden soll, durch Belastungen an Eisenstangen geprüft. Seine Angaben waren beide Male gleichartig zwischen 7,5 und 10 Proz. zu groß. Die hauptsächlich verwendeten Preßformen waren zylindrische Eisenstücke von 70 mm Außendurchmesser, 12 cm Höhe und 28,0 mm weiter axialer Bohrung von 90 mm Tiefe. In diese Bohrung

1) Vgl. H. Hess, Zeitschrift f. Gletscherkunde 1. p. 249. 1906.

2) Vgl. H. Hess, Ann. d. Phys. 8. p. 405. 1902.

waren die Stempel möglichst genau eingeschliffen, durch welche der Druck auf das in der Form erzeugte Eis übertragen wurde. Die Stempel hatten demnach fast genau 28,0 mm Außendurchmesser. Einer füllte den Lochquerschnitt der Form vollständig aus; die anderen waren der Länge nach durchbohrt und zwar hatten diese Bohrungen 7,95; 11,10; 16,10; 19,25; 22,35 mm Durchmesser. Durch diese axialen Löcher konnte das unter den Ringflächen der Stempel gepreßte Eis abfließen; die entstandenen Eiskerne gingen durch ein in der Deckplatte der Presse angebrachtes Loch in die Höhe. Diese Deckplatte war mit dementsprechend kräftigen Versteifungsrippen versehen, damit sie den großen Drucken widerstehen konnte. — Außer diesen Preßformen kamen noch eine mit 40,4 mm Bohrung und vollem Stempel und die bereits 1906 gebrauchte kleine Form von 10,2 mm Bohrung und vollem, dicht anschließendem Stempel, dann eine Holzform und eine mit Glasfenstern versehene rechteckige, aus drei zusammengeschraubten Teilen bestehende Eisenform in Verwendung (vgl. u.). Die zylindrischen Eisenformen waren während der Pressungen von eng anschließenden doppelwandigen Blechgefäßen umgeben, in denen Kältemischungen geeigneter Art (meist Salzwasser mit Eis) untergebracht wurden, so daß das ungepreßte Eis längere Zeit auf fast konstanter Temperatur gehalten werden konnte. Für diese Bäder wurde fast immer die Kältemischung verwendet, in welcher der in der Form enthaltene Eiskern gebildet wurde. In anderen Fällen wurde das Eis in der Form ca.  $\frac{1}{2}$  Stunde auf der Temperatur des Bades gehalten, bevor die Pressungen begannen. Während jedes Versuches wurde die Badtemperatur mehrmals abgelesen.

Die axial durchbohrten Stempel, wie sie A. v. Obermayer<sup>1)</sup> anwandte, haben gegenüber der früher von mir verwendeten Form mit seitlichen Ausflußöffnungen den Vorzug, daß die Deformation des gedrückten Eises eine einfachere ist, also leichter verfolgt werden kann; deshalb habe ich die Einrichtung übernommen. Die Stempel ohne Durchbohrung bieten nahezu den Grenzfall, daß das Eis und das bei den Pressungen aus ihm entstehende Wasser am Ausweichen gehindert sind.

1) Vgl. A. v. Obermayer, Wiener Ber. 113, IIa. April 1904.

Doch fließt zwischen Stempel und Form immer etwas ab. Bei der Durchführung der Versuche von 1906—1907 wurde ich von meinem Schüler Hrn. Johannes Heckel unterstützt, dem hauptsächlich die Beobachtung der Manometerangaben und das Aufschreiben der von mir zugerufenen Zahlen über das Eindringen der Stempel und der Zeitangaben zufiel. Diese Arbeit übernahm 1908 mein ältester Sohn, dessen Zuverlässigkeit, ebenso wie die seines Vorgängers, ausreichende Proben bestand. Ich selbst habe die Pressungen so ausgeführt, daß die Schwankungen des Manometers während einer Abwärtsbewegung des Pumpenkolbens möglichst klein (bei großen Drucken höchstens  $10 \text{ kg/cm}^2$ , bei geringeren weniger) waren. Die für je eine Minute Versuchsdauer aufgeschriebenen Mittelwerte der Drucke wurden stets so berechnet, daß dem Höchstdruck, der in dieser Zeit auftrat, das größere Gewicht beigelegt wurde. Die Vorrückungsgeschwindigkeit des Stempels wurde dadurch bestimmt, daß von 30 zu 30 Sekunden oder auch von Minute zu Minute die Entfernung zwischen Grund- und Deckplatte der Presse abgelesen wurde.

Das Eis in den Preßformen wurde aus destilliertem Wasser erzeugt, daß nur wenig Luft enthielt. Eine Rostbildung in der Form konnte jedoch nicht völlig vermieden werden. Die dadurch bewirkte Verunreinigung des Eises hat wohl einiges zu den Ungleichartigkeiten der Beobachtungsergebnisse beigetragen.

Die sehr wichtige direkte Bestimmung der Temperatur des unter Druck befindlichen Eises konnte ich leider nicht durchführen, weil mir sowohl ein geeignetes Galvanometer, dessen Ausschläge ein in den Preßstempel eingebautes Thermoelement veranlaßt, fehlte und weil ich auch keinen zweiten Gehilfen zur Verfügung hatte. Der Versuch, der kleinen Presse ein sicher selbstschreibendes Manometer anzufügen, das den einen Gehilfen teilweise ersetzt hätte, brachte kein brauchbares Ergebnis. Bei den rasch verlaufenden Pressungen war es natürlich unmöglich, das unter Druck befindliche Eis auch nur annähernd auf konstanter Temperatur zu erhalten. Die zwischen Bad und gepreßtem Eis entstandene Temperaturdifferenz veranlaßte aber bei den Eisenformen immer eine Wärmeströmung. So mußte also die Temperatur des Eises in der Form stets zwischen der Badtemperatur und der dem Druck entsprechen-

den Schmelztemperatur des Eises liegen. Wie die wahrscheinliche Eistemperatur indirekt ermittelt wurde, ist weiter unten näher erläutert.

Würde keine Wärmeleitung stattfinden, so müßte das unter Druck stehende Eis adiabatisch seine Temperatur längs der Schmelzkurve erniedrigen, wenn bei den Pressungen durch den eindringenden Stempel das Eis verflüssigt wird. Wäre die Wärmeleitung so günstig, daß jede durch Druck bewirkte Temperaturänderung sofort durch Wärmezufuhr aufgewogen würde, so würde bei jeder Temperatur des Eises die kleinste Drucksteigerung über den Schmelzdruck genügen, um den Stempel mit beliebiger Geschwindigkeit eindringen zu lassen. Für diesen isothermen (idealen) Vorgang würde die Schmelzkurve völlig ausreichen, um den Übergang von Eis in Wasser unter Druckwirkung zu beschreiben. Im praktischen Falle aber wird die Schmelzkurve durch eine Schmelzfläche ersetzt, die erst für große Stempelgeschwindigkeiten sich dem Zylinder anschmiegt, dessen Leitlinie die Schmelzkurve ist, entlang dessen Mantellinie die Schmelz(Stempel-)geschwindigkeit sich ändert. Die sichere Kenntnis der Schmelzkurve des Eises war demnach eine notwendige Voraussetzung für die Beurteilung meiner Versuchsergebnisse.

Da Hrn. Tammanns Versuche mit Stempeln ausgeführt wurden, für welche der Querschnitt der Druckfläche etwa  $\frac{13}{14}$  von dem der Preßform war, da also hier auch bei hohen Drucken ein Fließen, aber nicht notwendigerweise ein Schmelzen des Eises eintreten mußte, so glaubte ich die von Tammann experimentell gefundene Schmelzkurve stimme mit der theoretischen nicht vollständig überein; denn diese würde erst bei einem völlig dicht schließenden Stempel erhalten. Ich habe deshalb zunächst eine *Berechnung der Schmelzkurve* in folgender Weise durchgeführt. Aus dem zweiten Hauptsatz folgt die bekannte Gleichung

$$(I) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = c - C + \frac{q}{T},$$

worin  $T$  die absolute Temperatur eines Gemisches von Eis und Wasser,  $q$  die Schmelzwärme,  $C$  die spezifische Wärme des Eises und  $c$  die spezifische Wärme des Wassers bedeutet.

Für die spezifischen Wärmen  $c$  und  $C$  besteht nun die Beziehung:

$$(II) \quad \begin{cases} c - C = c_p - C_p - \frac{q}{\sigma - s} \cdot \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} \right) \\ \quad \quad \quad = c_p - C_p - q \cdot f(t), \end{cases}$$

wobei  $c_p$  und  $C_p$  die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck,  $\sigma$  und  $s$  die spezifischen Volumina von Wasser und Eis bedeuten. Die Schmelzwärme  $q$  ist in diesen Gleichungen mit dem der Temperatur  $T$  entsprechenden Werte einzusetzen; sie ist selbst eine Funktion der Temperatur und daher

$$(III) \quad q = q_0 + t \cdot \frac{\partial q}{\partial t}$$

in erster Annäherung.

Die Gleichungen (I), (II) und (III) liefern also:

$$(IV) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{c_p - C_p - q_0 \left( f(t) - \frac{1}{T} \right)}{1 + t \left( f(t) - \frac{1}{T} \right)}.$$

Zur Bestimmung der Werte von  $c_p$  wurde die für die spezifische Wärme des Wassers von Barnes aufgestellte Formel

$$c_p = 0,99733 + 0,0000035(37,5 - t)^2 + 0,0000001(37,5 - t)^3$$

benutzt, welche nach Barnes und Cooke<sup>1)</sup> auch für unterkühltes Wasser gilt. Durch Extrapolation wurden aus den Versuchsergebnissen von Regnault und von Person für die spezifische Wärme des Eises die  $C_p$ -Werte erhalten. Der Ausdehnungskoeffizient des unterkühlten Wassers wurde nach Weidners<sup>2)</sup> ausgeglichenen Messungsergebnissen benutzt; während Plückers, Petterssons und Dewars Messungen über die Ausdehnung des Eises zur Ermittlung von  $s_t$  verwendet wurden. Es ergaben sich

$$\sigma_t = 1,000136 - 0,000062 t + 0,000011 t^2,$$

$$s_t = 1,091147 + 0,000187 t + 0,000001 t^2,$$

also

$$\sigma_t - s_t = -0,091011 - 0,000249 t + 0,000010 t^2$$

1) H. F. Barnes u. L. Cooke, Phys. Rev. 15. p. 65. 1902; auch Chwolson's Lehrbuch 3. p. 185.

2) Weidner, Pogg. Ann. 29. p. 300. 1866; Chwolson's Lehrbuch 3. p. 134.

und

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial t} = -0,000249 + 0,000020 t.$$

So wurden die in Tab. 1 enthaltenen Einzelwerte von  $\partial \varrho / \partial t$  und die von  $\varrho$  gefunden, wobei  $\varrho_0 = 79,25$  gesetzt wurde. [Dieser Regnaultsche Wert verdient nach Leduc<sup>1)</sup> den Vorzug unter den verschiedenen Messungsergebnissen.] Die bekannte Beziehung

$$(V) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\varrho}{A \cdot T \cdot (\sigma - s)} \quad \text{bzw.} \quad p' = \frac{426 \cdot \varrho}{10000 \cdot T(\sigma - s)}$$

endlich, in welcher  $p$  den Druck,  $A$  das Wärmeäquivalent bedeuten, wurde zur Ermittlung der Druckänderung  $p'$  benutzt, die nötig ist, damit die Temperatur des Eis-Wassergemisches um  $1^\circ$  geändert werde.

Tabelle 1.

$t$	$c_p$	$C_p$	$\partial \varrho / \partial t$	$\varrho$	$p'$	$p$
$0^\circ$	1,009	0,538	0,544	79,25	136,2	0
- 1	1,011	36	532	78,71	136,0	136,2
- 2	1,012	34	518	78,18	136,0	272,2
- 3	1,013	32	504	77,66	135,8	408,2
- 4	1,015	30	492	77,16	136,0	544,0
- 5	1,016	28	475	76,67	136,0	680,0
-10	1,023	18	400	74,45	138,0	1364,0
-15	1,030	08	327	72,63	141,0	2060,0
-20	1,037	499	200	71,32	146,5	2776,0

Den auf diesem Wege schrittweise berechneten Werten des Überdruckes  $p$  haftet noch eine nicht unbeträchtliche Unsicherheit an, die hauptsächlich auf die geringe Genauigkeit zurückzuführen ist, mit welcher die Änderung der spezifischen Wärme des Wassers angegeben werden kann. Die Bestimmungen von Barnes z. B. ergeben für  $t = -5^\circ$  den Wert  $c_p = 1,0158$ , seine Formel liefert  $c_p = 1,011$ , während aus den von Marinelli ausgeführten Messungen, die der Formel von Bartoli und Stracciati entsprechen,  $c_p = 1,0099$  folgt. In obiger Tab. 1 wurde Barnes' Beobachtungsergebnis benutzt. Im ganzen zeigt sich, daß die berechnete Schmelzkurve des Eises von  $0$  bis  $-5^\circ$  als gerade Linie

$$p = -136 t,$$

1) A. Leduc, Soc. franç. de phys. 2./II. 1906.

von  $-5$  bis  $-20^\circ$  als schwach gekrümmte Kurve

$$p = -136t + 0,04t^2$$

mit guter Annäherung angegeben werden kann. Nur zwischen  $-3$  und  $0^\circ$  ist die Schmelzkurve schwach gegen die Druckachse gekrümmt; bei tieferen Temperaturen wendet sie sich von dieser Achse weg. Dieser Verlauf bleibt derselbe, wenn man die innerhalb der bisherigen Beobachtungsergebnisse über die spezifische Wärme des Eises zulässigen Änderungen in den oben gemachten Annahmen vornimmt. Auch die Annahme  $C_p$  für  $0^\circ$  sei noch beträchtlich größer als 0,538, etwa gleich 0,58, die noch am ehesten zulässig erscheint, würde in den  $p$ -Koordinaten der Schmelzkurve nur unwesentliche Verschiebungen von ca. 1 Proz. bewirken, ohne den Krümmungssinn der Kurve zu ändern.

Die von Tammann gegebene Interpolationsformel

$$(a) \quad p = -140,0t + 2,11t^2,$$

welche seiner experimentell gefundenen Schmelzkurve entsprechen soll, gibt gegenüber der oben „berechneten“ Schmelzkurve Abweichungen zwischen 18 und 30 Proz. nach oben. Sie stimmt auch mit den Tammannschen Beobachtungsergebnissen nicht überein. Diesen paßt sich die durch

$$(b) \quad p = -129,0t - 1,4t^2$$

dargestellte Kurve entschieden besser an. Sie gibt allerdings gegen die berechnete Schmelzkurve Abweichungen von 11 bis 27 Proz. nach unten.

Man erhält

	aus Tammanns Versuchen	aus Formel (b)	aus Formel (a)	für die ber. Schmelzkurve
für $t = -5^\circ$	$p = 615 \text{ kg}$	610 kg	753 kg	680 kg
-10	1115	1150	1611	1364
-15	1625	1620	2575	2060
-20	2042	2020	3644	2776

Die Abweichungen zwischen Tammanns experimentell bestimmten Drucken und denen der berechneten Schmelzkurve sind teils auf die Ungenauigkeiten der für die Berechnung benutzten Konstanten des Eises, zum anderen Teil darauf zurückzuführen, daß die Tammannschen Drucke nicht ganz die Schmelzdrucke sind, weil sie, wie später gezeigt wird, relativ kleinen Schmelzgeschwindigkeiten entsprechen.



Um darüber Aufklärung zu erhalten, ob bei dem die Preßform möglichst dicht schließenden Stempel Wasser oder ein Gemisch von Wasser und kleinen Eispartikeln zwischen Formwandung und Stempel zum Abfließen kam, verwendete ich zunächst eine von zwei Eisenbändern zusammengehaltene Form aus Buchsbaumholz mit ca. 16 cm Außendurchmesser und 27,8 mm Bohrung. Der hölzerne Stempel hatte an den Stirnflächen kurze Eisenschuhe von 27,5 mm Durchmesser. Diese Form und der Stempel wurden vor den Preßversuchen in Leinöl gesotten, so daß sich die Holzporen möglichst gut mit Öl ausfüllten, nachdem vorher die Luft ziemlich gut ausgepumpt war.

Mit dieser Form konnten zwei Versuche ausgeführt werden, die folgende Ergebnisse lieferten:

Tabelle 2.

Versuch I.		Versuch II.	
Eistemperatur $-0,1^{\circ}$ .		Eistemperatur $0^{\circ}$ .	
Stempelweg mm/min.	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Stempelweg mm	Druck kg/cm <sup>2</sup>
8,5	250	6,5	229
7,0	280	4,0	240
6,0	322	4,5	250
7,0	343	2,0	255
8,0	395	4,0	290
9,0	408	4,0	303
9,0	408	4,0	343
Am oberen Rande des Loches tritt weder Eis noch Wasser aus; aber das Leinöl wurde aus dem Holze herausgepreßt.		4,0	369
		3,5	382
		4,0	382
		4,0	382
		4,0	374
		4,0	358
		4,0	382
		4,5	382
		4,5	395

Beim Nachlassen des Druckes hebt sich die Form vom Preßtisch ab; unter ihr bildet sich ein Einkern von 3 mm Breite und 10 mm Höhe. Die Form ist zerrissen. Während des Pressens dringt wieder Leinöl aus dem Holz.



Weder beim ersten, noch beim zweiten Versuch kam am oberen Rande der Bohrung dieser Form etwas zum Ausfließen. Man hat daher die stetige Zunahme des Druckes bei fast gleich bleibender Geschwindigkeit des Stempels darauf zurückzuführen, daß das verdrängte Schmelzprodukt teils bei der Entlastung zwischen Stempel und Formwandung fest wurde und zum anderen Teil in die Holzporen eindrang, wo es wahrscheinlich auch fest wurde. Die Pressung des Eises fand bei fast völlig dicht schließendem Stempel und beinahe ohne jede Wärmezufuhr von außen statt (wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit des Holzes). Das Eis mußte also unter dem Druck immer niedrigere Temperaturen annehmen, daher auch die ständige Zunahme des Druckes. Daß diese Temperaturerniedrigung eintrat, zeigt das Gefrieren des durch die zerborstene Form ausdringenden Preßproduktes. Andererseits zeigt das während der Pressungen um die ganze Form herum als feiner Sprühregen austretende Öl, daß in die Poren des Holzes wirklich *Wasser* eingedrungen ist, daß also wirklich das Eis bei den angewandten Drucken verflüssigt wurde.

Um zu sehen, ob diese Verflüssigung auch dann eintritt, wenn das vom eindringenden Stempel verdrängte Material bequemer abfließen kann als in dem Falle der Holzform, ließ ich eine rechteckige Eisenform herstellen, von welcher zwei gegenüber liegende Wände im unteren Teil durch 12 mm starke Glasplatten ersetzt waren. Im oberen Teil der Form wurde der Stempel geführt, der den unteren Teil nur zur Hälfte ausfüllte. Man konnte hier die während der Pressung erfolgenden Vorgänge direkt wahrnehmen. Es zeigte sich an der Unterfläche und an der Seite des eindringenden Stempels ein schmaler, kaum  $\frac{1}{2}$  mm breiter heller Streifen, der beim Nachlassen des Druckes fast augenblicklich verschwand. Man konnte außerdem deutlich sehen, daß das Eis dem eindringenden Stempel wie eine Flüssigkeit ausweicht, da die feine Säule, von Luftbläschen und zersplitterten Kristallen, welche die Achse des Eisprismas kennzeichnet, sich abbog und seitlich verschob (vgl. Fig. 1).

Waren die Seitenteile der Form, also auch die Glasplatten, nur 3 mm voneinander entfernt (auch der Stempel hatte dann 3 mm Dicke), so konnte im Polarisationsapparat das farbige

Mosaik verschieden orientierter Eiskristalle wahrgenommen werden. (Bei 6 mm dickem Eis und Stempel war davon nichts zu sehen.) Diese Farben zeigten sich in dem hellen Streifen an den Stempelflächen nicht. Hier tritt also Wasser auf. Bei dem dritten Versuch, den ich mit dieser Fensterform machte, wurde am Manometer ein Druck von  $16 \text{ kg/cm}^2$  abgelesen. Unter der  $48,4 \text{ mm}^2$  großen Stempeldruckfläche stand also das Eis, das ursprünglich  $-7^\circ$  hatte, unter einem Druck von

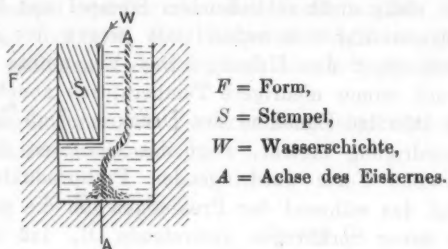


Fig. 1.

rund  $560 \text{ kg/cm}^2$ . Als durch Abschluß des oberen Teiles der Form durch den eindringenden Stempel das Eis am Ausweichen gehindert und der Druck auf etwa  $700 \text{ kg/cm}^2$  gestiegen war, zerbrachen die Glasplatten und die Experimente mit dieser Form hatten ihr Ende erreicht. Die Existenz der schmalen Wasserschicht am Stempel erscheint mir aber erwiesen und damit die Richtigkeit der Annahme, daß unter dem eindringenden Stempel das Eis verflüssigt wird.

Um einige Sicherheit für die Beurteilung der Temperatur des gepreßten Eises zu erhalten, benutzte ich eine breite Preßform von 40 mm Durchmesser mit möglichst dicht schließendem Stempel. Quer durch den Hohlraum des Preßzylinders zog nahe am Boden ein Messingrohr, in welches das Gefäß eines sehr empfindlichen Thermometers gesteckt war, das zwischen  $-10$  und  $0^\circ$  in Zehntelgrade geteilt war, von denen jeder fast 2 mm umfaßte. Man konnte also Hundertstelgrade ziemlich sicher schätzen. Das Quecksilbergefäß des Thermometers war außen mit Alkohol bzw. mit Quecksilber umgeben, damit die Temperaturänderungen des gepreßten Eises möglichst günstig auf das (nicht mitgepreßte) Thermometer übertragen werden konnten.

Vier Versuche ergaben folgende Ablesungen:

Tabelle 3.

## 1. Eis von 0°. Lufttemperatur + 1°.

Dauer der Pressung	Stempel- weg	Eis- dicke	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Ablesung am Thermom. <i>a</i>	Theoret. Schmelz- temp. <i>b</i>	Diffe- renz <i>a-b</i>
30 Sek.	2 mm	19 mm	75	-0,15°	-0,55°	0,40°
30 "	2 "	17 "	106	-0,47	-0,78	0,31
30 "	2 "	15 "	153	-0,65	-1,13	0,48
30 "	2 "	13 "	208	-0,77	-1,53	0,76

## 2. Eis von 0°. Lufttemperatur + 1°.

20 Sek.	1,5 mm	13,0 mm	123	-0,33°	-0,94°	0,61°
5 "	0,3 "	11,7 "	142	-0,42	-1,04	0,62
30 "	1,0 "	10,7 "	142	-0,65	-1,04	0,39
40 "	1,7 "	9 "	155	-0,75	-1,14	0,39
30 "	2,0 "	7 "	155	-0,82	-1,14	0,32

## 3. Eis von 0°. Lufttemperatur + 1,5°.

30 Sek.	9 mm	19 mm	240	-0,35°	-1,77°	1,42°
30 "	3 "	16 "	290	-0,78	-2,13	1,35
30 "	4 "	12 "	343	-0,82	-2,45	1,63
30 "	2 "	10 "	393	-1,45	-2,90	1,45
30 "	3 "	7 "	357	-1,85	-2,63	0,78

## 4. Eis von 0°. Hg am Thermometer. Lufttemperatur + 1,5°.

30 Sek.	3 mm	27 mm	182	-0,53°	-1,34°	0,61°
30 "	3 "	24 "	207	-0,80	-1,52	0,72
30 "	3 "	21 "	215	-0,95	-1,58	0,63
30 "	3 "	18 "	217	-1,05	-1,59	0,54
30 "	3 "	15 "	218	-1,12	-1,60	0,48
30 "	3 "	12 "	225	-1,25	-1,65	0,40

Noch einige solcher Pressungen wurden gemacht, aber die erlangten Resultate scheinen weniger zuverlässig als die der vorstehend mitgeteilten Versuche. Auch hier sind die Zeitbestimmungen und die einzelnen Stempelwege nicht besonders genau. Das ist nicht zu verwundern, wenn man beachtet, daß ich während der Pressungen die Stempelverschiebung, den Gang des Uhrzeigers und hauptsächlich den des Quecksilberfadens im Thermometer zu verfolgen hatte, während

mein Gehilfe, dem die Beobachtung der Manometerschwankungen oblag, außer den hierauf bezüglichen Zahlen auch die ihm von mir zugerufenen zu notieren hatte.

Aus den vier oben mitgeteilten Versuchen ergibt sich, daß die gepreßte Eismasse als Ganzes ziemlich rasch die durch den Druck bewirkten Temperaturänderungen aufnimmt. Doch bleiben die Angaben des Thermometers immer etwas hinter den nach der Theorie zu erwartenden Temperaturen zurück. Das rührt nur teilweise von der Trägheit des Thermometers bzw. von der Leitung aus dem Eis durch Messing und Glas zum Quecksilber des Instrumentes her; zum größeren Teil kommt diese Differenz wohl davon, daß nicht die *ganze* Eismasse die dem Druck entsprechende Temperaturniedrigung erfährt, oder mit anderen Worten, daß nicht die ganze Eismasse unter dem an der Stempelfläche herrschenden Druck steht. In der Tat zeigen Versuch 2, 3 und 4 ziemlich deutlich, daß jene Differenz um so kleiner wird, je dünner die zwischen Thermometer und Stempel liegende Eisschichte ist. Besonders aus Versuch 4 ergibt sich, daß bei einer Eisdicke 0 auch die Temperaturdifferenz verschwinden würde. Es scheint mir daher die Annahme berechtigt, daß an der Druckfläche des Stempels genau die von der Theorie geforderte, dem Druck entsprechende Temperaturniedrigung eintritt; in einiger Entfernung von der Druckfläche ist die Temperaturänderung geringer, so daß innerhalb der gepreßten Eismasse ein Temperaturgefälle besteht. Bei kleineren Drucken, bis etwa  $150 \text{ kg/cm}^2$ , ist dieses klein, ca.  $0,06^\circ$  pro mm; bei zunehmendem Druck wird es größer, etwa  $0,17^\circ$  bei  $400 \text{ kg/cm}^2$ .

Versuch 2 und 4 zeigen jedoch auch, daß bei annähernd gleichbleibendem Druck die Differenz zwischen den Angaben des Thermometers und der theoretischen Temperaturänderung um so kleiner wird, je länger die Pressung dauert und daß nach etwa 8 Min. (bei Versuch 4) die Differenz verschwinden würde. Diesem Umstand ist wohl die größere Bedeutung beizulegen; er wurde auch bei der Korrektur der Temperaturen beachtet.

Während der vier Pressungen war die Form nicht mit einem Bade umgeben; es wird aber von der etwas über  $1^\circ$  warmen Luft doch wohl immer Wärme an den Preßzylinder

und dann auch an das gedrückte Eis von niedriger Temperatur abgegeben worden sein, so daß auch aus diesem Grunde die Thermometerangaben höher als die zu erwartenden Temperaturen waren.

Um den *Einfluß der Wärmeleitung* zwischen Bad und gepreßtem Eis beurteilen zu können, stellte ich folgende Betrachtung an. An der Stempeldruckfläche herrsche die dem Druck entsprechende Schmelztemperatur; weiter abwärts steige die Temperatur des Eises entsprechend dem vorhin erwähnten Gefälle etwas an. Die Eismasse sei senkrecht zur Druckrichtung in parallele Platten zerlegt, welche ihrer Dicke nach dieselbe Temperatur haben. In radialer Richtung ströme in jede Platte von der Formwandung, die auf der konstanten Temperatur des Bades gehalten sei, Wärme in das Eis, so daß bei stationärem Zustand die Temperatur im Abstand  $x$  von der Formwandung durch die Gleichung

$$t = \theta \cdot e^{-ax} \cdot \frac{r}{r-x}$$

gegeben wäre. In dieser bedeutet  $\theta$  die Temperaturdifferenz zwischen Formwandung und gepreßter Eisschichte,  $r$  den Radius der Zylinderöffnung und

$$a = \sqrt{\frac{h}{k} \cdot \frac{u}{q}}.$$

$h/k$  ist das Verhältnis des äußeren und inneren Wärmeleitungsvermögens; es wurde willkürlich gleich  $1/30$  genommen.  $u$  ist der Umfang,  $q$  der Querschnitt eines um  $x$  von der Formwandung abstehenden zylindrischen Plattenschnittes, also

$$u = 4(r-x)\pi + 2d, \quad q = 2(r-x)\pi \cdot d$$

und daher

$$\frac{u}{q} = \frac{2}{d} + \frac{1}{(r-x)\pi},$$

so daß

$$a = \sqrt{\frac{1}{30} \left( \frac{2}{d} + \frac{1}{(r-x)\pi} \right)},$$

worin  $d$  die Dicke der betrachteten Eisplatte ist. Nimmt man diese klein,  $1/10$  bis  $1/100$  mm, wobei die größeren Dicken den kleinen Stempelgeschwindigkeiten entsprechen, so kann das Glied  $1/(r-x)\pi$  gegen den anderen Summanden vernachlässigt werden. Die *mittlere* Temperatur für die ganze Fläche

des vollen Stempels, sowie die für die Ringflächen der durchlochten Stempel werden dann, wie eine leichte Überlegung ergibt, durch die Gleichung

$$t_m = \int_{x=0}^{x=r-r_1} \theta \cdot e^{-x \sqrt{\frac{2h}{dk}}} \cdot \frac{2r dx}{r^2 - r_1^2}$$

gegeben; man hat also

$$t_m = - \frac{2r}{r^2 - r_1^2} \cdot \theta \cdot \sqrt{\frac{2h}{dk}} \cdot \left( 1 - e^{-(r-r_1) \sqrt{\frac{2h}{kd}}} \right),$$

worin  $r$  der äußere Radius,  $r_1$  der Innenradius eines Stempelloches ist. Daraus erhielt ich für Plattendicken von  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{20}$  mm für die Temperaturkorrekturen folgende Verhältniszahlen:

Bohrung in mm	0	8	11	16	19	22
Korrektur in %	100	98	95	90	85	75

Zur genaueren Bestimmung der Korrektur für den vollen Stempel wurde  $t_m$  für verschiedene Werte von  $d$  berechnet; den besten Anhalt gaben jedoch die Resultate der drei Pressungen, welche am 22. und 23. Mai 1908 mit möglichst gleich bleibenden Geschwindigkeiten ausgeführt wurden. Diese Ergebnisse enthält die folgende Tab. 4.

Tabelle 4.

Zylinder mit 28,0 mm Bohrung.

Tag	Bad-temp.	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
22. V.	0,0	70		30"	0,53	-0,13°
		102		"	0,77	0,40
		150	in 6 Min.	"	1,12	0,70
		200	51 mm	"	1,50	1,05
		270	möglichst	"	2,02	1,50
		320	gleich-	"	2,40	1,92
		375	mäßig	"	2,82	2,40
		410		"	3,08	2,77
		480	0,142	"	3,60	3,35
		525	mm/sec	"	3,95	3,75
		575		"	4,30	4,20
		625		"	4,70	4,70

Tabelle 4 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
22. V.	0,0	52		10"	0,39	-0,10°
		140		"	1,05	0,42
		230		"	1,73	0,88
		280	43 mm in	"	2,10	1,15
		330	2,5 Min.	"	2,48	1,62
		372	sehr	"	2,80	1,95
		425	gleich-	"	3,18	2,39
		475	mäßig	"	3,56	2,55
		500		"	3,75	2,90
		540	0,287	"	4,05	3,30
		560	mm/sec	"	4,20	3,55
		580		"	4,35	3,90
		600		"	4,50	4,10
		630		"	4,73	4,45
		655		"	4,92	4,70
23. V.	0,0	90	0,100	1'	0,67	0,2
		170	0,100	"	1,3	0,8
		212	0,110	"	1,6	1,1
		275	0,100	"	2,1	1,8
		345	0,110	"	2,7	2,4
		383	0,130	"	2,9	2,9

Die unter Benutzung der verschiedenen Hinweise erhaltenen Korrekturwerte sind in Fig. 2 enthalten.

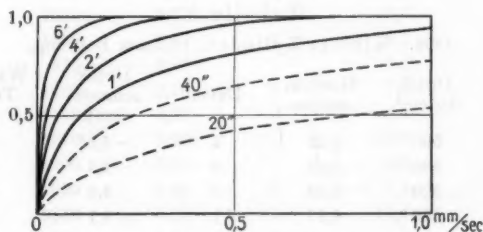


Fig. 2.

Es wurde also z. B., wenn die Verschiebungsgeschwindigkeit des Stempels 0,3 mm/sec betrug und die Pressung eine Minute dauerte, die Badtemperatur um 0,7 der Differenz

zwischen Bad- und Druckschmelztemperatur gegen die letztere hin geändert, während bei gleicher Geschwindigkeit, aber 6 Min. Versuchsdauer, die ganze Temperaturdifferenz als Korrektur eingesetzt wurde. Für die durchlochten Stempel wurden die aus Fig. 2 gewonnenen Beträge mit den oben angegebenen Verhältniszahlen multipliziert; für den kleinen Zylinder wurde als Reduktionsfaktor 0,67, für den 40,4 mm-Zylinder 1,4 benutzt.

Mit diesen Korrekturen wurden die in den folgenden Tabellen angegebenen „wahrscheinlichen“ Temperaturen des Eises während der Pressungen erhalten.

In Tab. 5 sind zunächst die Messungsergebnisse mitgeteilt, die ich im Jahre 1906 mit dem kleinen Zylinder von 10,2 mm Bohrung erhielt. Diese Zusammenstellung, welche nach den Temperaturen des Eises geordnet ist, läßt den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und Schmelzgeschwindigkeit noch nicht klar erkennen. Trägt man aber die beiden letzteren Koordinaten in ein Netz auf und fügt jedem Punkt die Größe des Druckes bei, so gewinnt man durch Interpolation leicht die Isobaren bzw. deren Projektion in die Temperatur-Geschwindigkeits-Ebene und bemerkt damit den ziemlich gleichmäßigen Verlauf der Schmelzfläche im untersuchten Gebiet. Einige Versuchsergebnisse für sehr tiefe Temperaturen lassen vermuten, daß dieser Verlauf auch unterhalb  $-20^{\circ}$  noch im wesentlichen derselbe bleibt.

Tabelle 5.

1906. Kleiner Zylinder, 10,2 mm Bohrung.

Bad-temp.	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
- 2,0	500	0,52	1'	- 3,8°	- 3,0°
0,0	580	0,40	2	- 4,3	- 3,1
- 1,8	520	0,50	2	- 3,9	- 3,1
- 1,5	550	0,67	1	- 4,1	- 3,1
- 0,1	590	0,52	1	- 4,4	- 3,2
- 3,5	325	0,20	1	- 2,4	- 3,3
- 1,5	590	0,55	2	- 4,4	- 3,5
- 0,1	800	1,13	2	- 6,0	- 4,8
- 0,5	790	1,23	1	- 5,9	- 4,8
- 10,0	570	0,14	9	- 4,3	- 4,8



Tabelle 5 (Fortsetzung).

Bad-temp.	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
- 3,9°	780	0,51	1'	- 5,8°	- 5,0°
- 9,0	570	0,10	10	- 4,3	- 5,1
- 6,0	690	0,23	4	- 5,2	- 5,5
- 6,2	770	0,32	1	- 5,8	- 6,0
- 4,0	950	1,00	1	- 7,1	- 6,1
- 6,0	950	1,30	20"	- 7,1	- 6,2
- 6,8	790	0,30	1'	- 5,9	- 6,2
- 5,2	980	0,80	1	- 7,3	- 6,5
- 6,3	970	0,73	1	- 7,3	- 6,7
- 9,0	800	0,28	6	- 6,0	- 6,7
- 7,6	820	0,17	1	- 6,3	- 7,1
- 7,6	980	0,52	2	- 7,3	- 7,4
- 11,0	680	0,11	6	- 5,1	- 7,4
- 0,1	1100	1,11	2,5	- 8,2	- 7,4
- 10,5	1010	0,33	3	- 7,6	- 8,5
- 10,5	1000	0,33	3	- 7,6	- 8,5
- 12,5	950	0,23	5	- 7,2	- 8,8
- 8,5	1200	1,03	1	- 9,0	- 8,8
- 8,5	1200	0,95	1	- 9,0	- 8,9
- 11,5	840	0,11	4	- 6,3	- 9,0
- 14,0	900	0,16	7	- 6,8	- 9,0
- 9,7	1120	0,42	1	- 8,4	- 9,1
- 9,3	1200	0,60	1	- 9,0	- 9,2
- 11,0	1195	0,35	1	- 9,0	- 10,1
- 13,0	1080	0,26	3	- 8,1	- 10,1
- 10,5	1330	0,77	1	- 10,0	- 10,3
- 11,5	1230	0,37	1	- 9,2	- 10,4
- 11,0	820	0,01	1	- 6,2	- 10,6
- 13,0	1000	0,10	3	- 7,5	- 10,7
- 13,5	1140	0,22	2	- 8,5	- 10,8
- 12,0	1370	0,60	1	- 10,2	- 11,0
- 14,0	1200	0,23	1	- 9,0	- 11,3
- 13,0	1050	0,04	3	- 7,9	- 11,6
- 12,5	1380	0,33	1	- 10,4	- 11,7
- 11,9	1570	1,44	1	- 11,8	- 11,9
- 12,5	1600	1,16	1	- 12,0	- 12,3
- 13,5	1500	0,55	1	- 11,2	- 12,2
- 12,8	1020	0,015	1	- 7,8	- 12,3
- 13,0	1390	0,30	40"	- 10,4	- 12,3
- 14,0	1100	0,07	1'	- 8,3	- 12,4

Tabelle 5 (Fortsetzung).

Bad-temp.	Druck kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
-15,0°	1240	0,13	2'	- 9,3°	-12,5°
-15,0	1660	0,87	1	-12,5	-13,3
-14,5	1680	0,85	1	-12,6	-13,4
-15,0	1270	0,09	1	- 9,9	-13,5
-15,3	1680	0,85	1	-12,6	-13,6
-16,0	1400	0,18	3	-10,5	-13,7
-14,5	1220	0,02	1	- 9,2	-14,2
-15,8	1680	0,33	1	-12,6	-14,6
-17,5	1760	0,38	4	-13,2	-15,1
-15,4	1960	1,20	50"	-14,7	-15,2
-15,8	1960	1,00	1'	-14,7	-15,4
-17,5	1910	0,52	1	-14,4	-15,9
-18,0	1800	0,31	1	-13,8	-16,0
-18,5	1600	0,15	1	-12,0	-16,2
-17,6	1470	0,05	1	-11,0	-16,3
-18,0	1570	0,08	1	-11,8	-16,3
-19,0	2160	0,80	1	-16,2	-17,3
-18,0	2280	0,98	1	-17,1	-17,7
-26,0	1700	0,10	4	-12,8	-19,9
-20,4	1760	0,005	1	-13,2	-20,2
-28,0	1820	0,07	3	-13,6	-21,0
-25,5	2450	0,33	3	-18,3	-21,0
-26,5	2500	0,30	3	-18,8	-22,2
-28,0	2600	0,33	1	-19,5	-24,0

## Zylinder mit 8,12 mm Bohrung.

- 80°	3300	0,15	1'	-22,6°	- 58°
- 70	4000	0,15	1	-30,2	- 50
- 60	4500	0,14	1	-34,0	- 46
- 50	6000	0,10	1	-45,3	- 46,5
-184	5000	0,04	1	-38	-154
"	6400	0,04	1	-48	-143 *

\* Stempel krumm.

Für diese letzten 6 Fälle sind natürlich die Temperaturen des gepreßten Eises ganz unsicher; auch die Druckschmelztemperaturen sind nur durch kaum zulässige Extrapolation der be-

rechneten Schmelzkurve annähernd ermittelt. Nach Tammanns Ergebnissen könnten bei den beobachteten Drucken und den zugehörigen Badtemperaturen nur Eis II oder III bestehen, doch auch diese Modifikationen nicht im Schmelzzustand. Aber der stetig, unter starkem Krachen eindringende Stempel, der selbst die niedrige Badtemperatur (wenigstens annähernd) besaß, zeigt doch eine sehr bedeutende Volumänderung an. Beim Nachlassen des Druckes wurde der Stempel um 8 mm (bei  $-50^{\circ}$ ) und um 1,5 mm bei  $-184^{\circ}$  gehoben; d. h. es wurde im letzten Fall die halbe, im ersten etwa ein Viertel der Volumänderung wieder rückgängig gemacht. Am oberen Rand der Zylinderöffnung traten feine Eiskristalle aus. Ob auch bei diesen niedrigen Temperaturen eine Verflüssigung des Eises eintrat, erscheint sehr fraglich. Die trotz steigender Temperatur enorm anwachsenden Drucke lassen vielmehr auf starke Kompression der neuen Eismodifikationen schließen. Die Form enthielt für den Versuch zwischen  $-80$  und  $-50^{\circ}$  ca. 4 ccm Eis, für den Versuch bei der Temperatur der flüssigen Luft ca. 2,6 ccm Eis. Bleibt Verflüssigung ausgeschlossen, so würde bei der sehr kleinen Menge Eisnadeln, die oben am Preßzylinder ausgetreten sind, das Eindringen des Stempels im ersten Fall eine Volumänderung von 40 Proz., im zweiten Fall von 6 Proz. bedeuten. Die erstere Zahl ist mit Tammanns Bestimmungen, die zwischen 17 und 20 Proz. ergaben, schwer verträglich; bei der letzteren handelt es sich nur um eine geringe Volumänderung, da die Verkrümmung des dünnen Stempels eine weitere Fortsetzung der Pressung verhinderte.

Mit dem kleinen Zylinder konnte ich 1906 wegen der hohen Lufttemperatur im Arbeitsraum ( $4-6^{\circ}$  C.) und wegen der geringen Drucke, die am Manometer kaum sicher ablesbar waren, nicht mit kleinen Schmelzgeschwindigkeiten und bei Temperaturen nahe an  $0^{\circ}$  arbeiten. Da aber gerade in diesem Bereich der Verlauf der Schmelzfläche besonderes Interesse hat, wurden 1907 und hauptsächlich 1908 die Versuche mit größeren Formen und unter besseren Temperaturverhältnissen des Beobachtungsraumes weiter geführt. Die Ergebnisse mit einer Form von 28,0 mm Bohrung und einer zweiten von 40,4 mm sind, soweit sie bei fast dicht schließendem Stempel erhalten wurden, in der folgenden Tab. 6 mitgeteilt.

Tabelle 6.

Zylinder von 28,0 mm Bohrung.

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
8. II. 07	-0,2°	295	0,16	1'	-2,2°	-1,2°
		340	0,14	1	-2,5	-1,6
		352	0,14	1	-2,6	-2,1
		375	0,13	1	-2,8	-2,5
	-0,7	230	0,13	1	-1,7	-1,1
		258	0,12	1	-2,0	-1,5
		268	0,12	1	-2,2	-1,9
		320	0,13	1	-2,4	-2,2
9. II.	-1,0	444	0,30	1	-3,3	-2,5
		490	0,24	1	-3,7	-3,2
		545	0,21	1	-4,1	-3,6
	-4,3	440	0,06	1	-3,3	-4,0
		470	0,07	1	-3,6	-4,0
	-4,1	488	0,08	2	-3,7	-3,9
		560	0,12	1	-4,2	-4,2
	-4,0	650	0,18	1	-4,9	-4,9
10. II.	-2,7	368	0,083	1	-2,8	-2,75
	-2,5	413	0,088	3	-3,1	-2,9
	-2,4	413	0,088	3	-3,1	-3,1
	-2,2	610	0,183	1	-4,6	-4,5
11. II.	-1,1	245	0,075	2	-1,8	-1,4
		280	0,075	3	-2,1	-1,8
	-1,0	212	0,050	4	-1,6	-1,5
		240	0,033	2	-1,8	-1,8
	-1,0	715	0,365	1	-5,4	-5,1
	-2,1	239	0,033	2	-1,8	-1,9
	-2,0	540	0,267	1	-4,1	-3,9
27. IV. 08	-0,2	162	0,133	1	-1,25	-0,65
		237	0,100	2	-1,8	-1,3
		260	0,083	1	-2,1	-1,7
		380	0,167	1	-2,9	-2,4
		420	0,100	1	-3,2	-3,2
		400	0,117	1	-3,1	-3,1
28. IV.	-0,2	139	0,133	1	-1,1	-0,5
		187	0,100	1	-1,4	-0,9
		139	0,067	1	-1,3	-0,9
		435	0,160	1	-3,3	-2,8

Tabelle 6 (Fortsetzung).

Tag	Bad. temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
30. IV. 08	-0,2°	44	0,083	1'	-0,3	-0,3°
		67	0,067	1	-0,5	-0,4
		118	0,033	1	-0,9	-0,8
		150	0,042	2	-1,1	-1,1
		187	0,045	3	-1,4	-1,4
1. V.	-1,6	248	0,100	1	-1,9	-1,7
		290	0,100	2	-2,1	-2,0
		355	0,083	2	-2,6	-2,6
	-1,0	470	0,117	1	-3,5	-3,5
2. V.	-0,6	550	0,45	1	-4,2	-3,5
		710	0,35	1	-5,5	-5,0
	-1,0	237	0,217	1	-1,8	-1,4
		340	0,133	1	-2,5	-2,1
		395	0,150	1	-3,0	-2,6
4. V.	-1,0	140	0,067	1	-1,2	-1,1
		140	0,037	3	-1,2	-1,1
		188	0,054	1	-1,4	-1,4
		265	0,058	1	-2,0	-1,9
	-0,2	67	0,067	1	-0,5	-0,3
		90	0,037	1	-0,7	-0,4
		110	0,042	1	-0,9	-0,6
		140	0,033	1	-1,1	-0,9
		190	0,091	1	-1,4	-1,3
5. V.	-1,0	90	0,05	2	-0,7	-0,9
		118	0,02	4	-0,9	-0,9
		275	0,10	2	-2,1	-2,0
		360	0,11	2	-2,7	-2,7
6. V.	-0,8	310	0,200	1	-2,3	-1,6
		338	0,133	1	-2,5	-2,0
		385	0,133	1	-2,9	-2,5
7. V.	-0,7	435	0,267	1	-3,3	-2,4
"	-0,0	67	0,083	1	-0,5	-0,2
		90	0,042	3	-0,7	-0,4
		118	0,047	3	-0,9	-0,9
		310	0,183	1	-2,3	-2,3

Tabelle 6 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck-schmelz-temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
8. V. 08	0,0°	45	0,117	1'	-0,3°	-0,1°
		67	0,058	1	-0,5	-0,2
		90	0,100	1	-0,7	-0,5
"	0,0	348	0,196	2	-2,6	-1,7
"	0,0	360	0,367	1	-2,7	-1,9
		380	0,167	1	-2,9	-2,2
9. V.	0,0	760	0,583	1	-5,7	-4,6
"	0,0	260	0,217	1	-2,0	-1,1
		288	0,133	1	-2,2	-1,5
		360	0,142	1	-2,8	-2,2
11. V.	0,0	140	0,217	1	-1,1	-0,6
		165	0,133	1	-1,3	-0,8
		212	0,100	1	-1,6	-1,1
"	0,0	90	0,083	1	-0,7	-0,2
		130	0,075	1	-1,0	-0,5
		176	0,083	1	-1,4	-1,0
		250	0,092	1	-1,9	-1,5
		310	0,125	1	-2,2	-2,1
		350	0,110	1	-2,7	-2,7
13. V.	0,0	90	0,080	3	-0,7	-0,2
"	0,0	102	0,133	1	-0,8	-0,3
		170	0,083	1	-1,3	-0,8
		212	0,100	1	-1,6	-1,1
		190	0,075	1	-1,4	-1,1
		267	0,092	1	-2,0	-1,8
		310	0,109	1	-2,3	-2,3
15. V.	-0,1	19	0,075	1	-0,14	-0,06
		42	0,083	1	-0,3	-0,2
"	0,0	90	0,350	20''	-0,7	-0,2
	-0,1	34	0,050	1'	-0,3	-0,1
		45	0,045	2	-0,3	-0,2
		360	0,325	1	-2,6	-2,2
"	0,0	120	0,400	10''	-0,8	-0,2
	0,0	248	0,583	45	-1,8	-1,0
	0,0	350	0,750	90	-2,7	-1,6

Tabelle 6 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck-schmelz-temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
14. V. 08	-0,1°	47	0,110	1'	-0,4°	-0,2°
		70	0,083	1	-0,5	-0,3
		107	0,067	1	-0,8	-0,6
		147	0,067	1	-1,1	-0,9
		172	0,070	3	-1,3	-1,3
	-0,1	47	0,080	2	-0,4	-0,2
	-0,1	350	0,267	1	-2,6	-1,7
	-2,0	180	0,010	2	-1,0	-1,4
	-3,4	340	0,050	3	-2,6	-3,0
	-3,1	225	0,016	4	-1,7	-2,4
16. V.	0,0	45	0,033	2	-0,3	-0,17
		45	0,050	3	-0,3	-0,15
"	0,0	500	0,725	20"	-3,8	-2,7
18. V.	0,0	500	0,733	15	-3,8	-2,5
	0,0	400	0,600	10	-3,0	-2,0
	0,0	250	0,300	30	-1,9	-1,0
	0,0	310	0,430	50	-2,3	-1,5
Zylinder mit 40,4 mm Bohrung.						
26. V.	0,0	120	0,110	1'	-0,9	-0,5
		260	0,075	1	-1,9	-1,5
	0,0	80	0,059	1	-0,4	-0,2
		167	0,059	1	-1,2	-0,96
		240	0,075	1	-1,8	-1,7
		295	0,075	1	-2,3	-2,3
27. V.	0,0	22		5"	-0,16	-0,02
		45		5	-0,34	-0,07
		70		5	-0,53	-0,15
		81	möglichst	5	-0,61	-0,20
		115	gleich-	5	-0,86	-0,36
		165	mäßig	5	-1,24	-0,61
		178	12 mm	5	-1,33	-0,75
		238	in 1'	5	-1,78	-1,11
		262	0,200	5	-1,96	-1,37
		286	mm/sec	5	-2,15	-1,66
		310		5	-2,32	-1,90
		360		5	-2,70	-2,35
		300	0,200	1'	-2,2	-1,3

Tabelle 6 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck-schmelz-temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
27. V. 08	0,0°	98	0,450	15"	-0,75°	-0,22°
"	0,0	63	0,310	15	-0,47	-0,14
"	0,0	45	0,042	1'	-0,35	-0,15
		50	0,025	1	-0,38	-0,23
		63	0,042	1	-0,49	-0,42
		74	0,033	1	-0,58	-0,42
		85	0,017	1	-0,65	-0,60
		110	0,025	1	-0,85	-0,80
		124	0,033	1	-0,96	-0,86
		186	0,033	1	-1,43	-1,43
30. V.	0,0	112	0,200	20"	-0,84	-0,30
	0,0	120	0,400	25	-0,90	-0,32
	0,0	62		ca. 6"	-0,46	-0,06
		96	12 mm		-0,72	-0,15
		128	in 1'		-0,96	-0,27
		150	möglichst		-1,13	-0,46
		188	gleich-		-1,41	-0,65
		216	mäßig		-1,62	-0,90
		242	0,200		-1,82	-1,25
		278	mm/sec		-2,08	-1,52
		311			-2,34	-1,90
		356			-2,67	-2,30

Die Angaben der Tab. 6 wurden zur genaueren Zeichnung der Schmelzfläche in der Nähe von 0° benutzt. Daß die mit den verschiedenen Preßformen erhaltenen Resultate sich doch zu einem einheitlichen Bilde zusammenfügen, ist wohl als Beweis für die Richtigkeit der angewandten Temperaturkorrekturen anzusehen.

Als wesentliche Eigenschaften zeigt die damit dargestellte Schmelzfläche:

1. Bei konstanter Temperatur wächst die Schmelzgeschwindigkeit mit zunehmendem Druck sehr schnell.
2. Bei konstantem Druck wächst die Schmelzgeschwindigkeit sehr rasch mit steigender Temperatur.



3. Konstante Schmelzgeschwindigkeit bedingt ein starkes Anwachsen des Druckes mit sinkender Temperatur.

Gegenüber der *theoretischen* Schmelzfläche, welche nahezu durch eine die Geschwindigkeitsachse enthaltende, gegen die  $t-v$ -Ebene geneigte Ebene dargestellt ist, zeigt die „*praktische*“ Schmelzfläche in zweifacher Hinsicht auffallende Abweichungen. Einmal ist diese Fläche für die Temperaturen in der Nähe von  $0^{\circ}$  stark gekrümmt und die Drucke, welche die experimentelle Bestimmung ergab, liegen z. T. beträchtlich über den theoretischen Schmelzdrucken. Der Hauptgrund für diese Abweichung scheint mir darin zu liegen, daß die gemessenen Drucke immer Mittelwerte für einen längeren Zeitraum (Minimum 5 Sek.) darstellen, innerhalb dessen die durch den Druck veranlaßte Temperaturerniedrigung wieder eine Steigerung des Druckes bedingt usw., wenn die Schmelzgeschwindigkeit gleich bleiben soll. Sie gelten also eigentlich für niedrigere, als die angegebenen Temperaturen. In Tab. 6 findet man, daß die Schmelzgeschwindigkeit am Anfang der Experimente immer größer ist, als späterhin. Diese Beobachtung veranlaßte mich, eine Reihe von Pressungen bei ganz kurzer Druckwirkung auszuführen; dabei ist allerdings die Bestimmung der Vorrückungsgeschwindigkeit des Stempels weniger genau als sonst. Aber das Resultat war doch eine beträchtliche Verminderung der Druckwerte für das Gebiet der hohen Temperaturen; dies zeigt besonders deutlich ein Vergleich der Fig. 3 mit der entsprechenden Darstellung meiner älteren Versuchsergebnisse.<sup>1)</sup> Es ist also anzunehmen, daß bei noch kürzerer Druckdauer noch kleinere Drucke für die einzelnen Werte der Schmelzgeschwindigkeit resultieren, so daß eine bessere Annäherung an die theoretische Schmelzfläche eintritt.

Die andere Abweichung zeigt sich in der Nähe der Temperaturenachse. Es ergibt sich, daß der Stempel in die Eismasse eindringt, auch wenn die Drucke ganz beträchtlich unterhalb der theoretischen Schmelzdrucken liegen. Da aber das Vordringen des dicht anschließenden Stempels, wie ich glaube, sicher gestellt zu haben, auf einer Verflüssigung der verdrängten Eismasse beruht und die Erscheinung bei kleinen

1) H. Hess, Zeitschr. f. Glkde. 1. p. 251.

Stempelgeschwindigkeiten von der bei größeren äußerlich nicht verschieden ist, so sagt die Gestalt der praktischen Schmelzfläche nichts anderes, als daß das Eis flüssig wird, wenn auch der Druck noch tief unter dem eigentlichen Schmelzdruck liegt. Dies wurde auch von G. Tammann gefunden, der sein Ergebnis in die Worte zusammendrängt: Das Eis ist zum

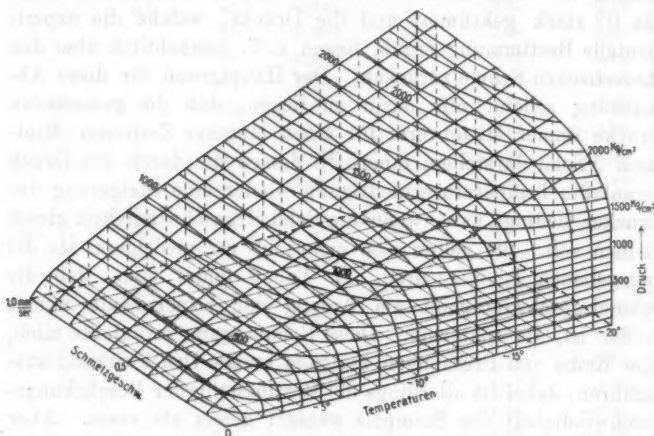


Fig. 3. Schmelzfläche des Eises.

Fließen wie geschaffen.<sup>1)</sup> Auch 1902 habe ich schon das Gleiche gefunden; aber ich hatte doch immer den Verdacht, es sei diese Erscheinung wenigstens z. T. auf die durch die Formwandungen hindurch stattfindende Wärmeleitung zurückzuführen. Nach der Ausgleichung der hier mitgeteilten Beobachtungsergebnisse ist diese Wärmewirkung in ausreichendem Maße berücksichtigt — aber die Krümmung der Isobaren, welche für kleine Schmelzgeschwindigkeiten in der Richtung der abnehmenden Temperaturen auftritt, ist geblieben. Das Eis schmilzt also, auch bei niedrigen Temperaturen, schon unter relativ geringen Drucken und es hat außerdem den Anschein, daß erst ein gewisser Druck erreicht sein muß, bevor

1) G. Tammann, Schmelzen und Erstarren p. 175.

das Eindringen des Stempels möglich ist. Für diese Minimaldrucke würde sich annähernd die Beziehung

$$p_{\min.} = -70 t - 2 t^2 \text{ kg/cm}^2$$

aus meinen Versuchen ergeben.

Hrn. Tammanns Experimente führen zu einem ähnlichen Resultate; er konnte mit seinem feineren Meßapparate noch viel kleinere Stempelgeschwindigkeiten bestimmen als ich bei meiner Einrichtung; erst von etwa  $p_{\min.} = -10 t \text{ kg/cm}^2$  würde nach seinen Angaben<sup>1)</sup> eine meßbare Verschiebung des Stempels erfolgen.

Über die Ursache dieses Schmelzens bei Drucken, die weit unter dem Schmelzdruck liegen, konnte ich völlig sichere Auskunft durch das Experiment nicht gewinnen. Ein Erklärungsversuch wird weiter unten gegeben werden. Hier sei nur bemerkt, daß die beiden Abweichungen der praktischen Schmelzfläche von der theoretischen wesentlich durch die Dimensionen der verwendeten Apparate und durch die Methode der Messung bestimmt sind; daher werden die von verschiedenen Beobachtern experimentell gefundenen Schmelzflächen nur qualitativ übereinstimmen.

Benutzt man die von Hr. Tammann gefundenen Werte der Ausflußgeschwindigkeit bei gewissen, möglichst konstant gehaltenen Temperaturen zur Konstruktion der Isothermen einer Fläche, die den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur und Ausflußgeschwindigkeit angibt, so findet man eine mit der korrigierten Schmelzfläche qualitativ übereinstimmende Fläche. Schon hieraus läßt sich der Schluß ziehen, daß auch bei den Tammannschen Versuchen das Eindringen des Stempels in das diesen überfließende Eis, auf eine Verflüssigung des letzteren an der Druckfläche zurückzuführen ist.

Wie sehr dieser Schluß gerechtfertigt ist, geht aus den Beobachtungsergebnissen hervor, welche mit den durchlochten Stempeln erhalten wurden. Sie sind in den folgenden Tab. 7 enthalten und in den Figg. 4—8 übersichtlich dargestellt. Diese Figuren, in denen die Isobaren 100, 200 und 300  $\text{kg/cm}^2$  der praktischen Schmelzfläche als punktierte Linien eingetragen

1) Vgl. l. c. p. 571.

sind, zeigen, daß auf der Druckfläche des eindringenden Stempels eine Verflüssigung des Eises stattfindet. Die angegebenen Drucke sind die auf die Ringfläche des Stempels reduzierten Manometerangaben; die dadurch erhaltenen Isobaren (die ausgezogenen Linien) fallen mit denen der Schmelzfläche fast zusammen. Daß sie es nicht ganz tun, liegt wohl an der nicht völlig, sondern nur annähernd zutreffenden Korrektur der Temperatur des gepreßten Eises.

Tabelle 7.

Öffnung 8 mm.

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
22. IV. 03	-1,2°	348	0,733	1'	-2,6°	-2,4°
28. IV.	0,0	340	0,833	1	-2,6	-2,3
	0,0	105	0,250	30"	-0,8	-0,3
	0,0	130	0,125	2'	-1,0	-0,7
	0,0	200	0,300	1	-1,5	-0,9
	0,0	450	1,033	1	-3,4	-3,2
30. IV.	-1,0	295	0,167	2	-2,2	-1,9
		"	0,150	4	-2,2	-2,1
		"	0,116	5	-2,2	-2,2
	-0,8	178	0,051	12	-1,2	-1,2
4. V.	-0,5	273	0,32	1	-2,1	-1,6
		348	0,25	3	-2,6	-2,3
	-0,5	410	0,22	4	-3,1	-2,9
11. V.	-0,1	382	0,53	1,5	-2,9	-2,6
	0,0	273	0,35	1	-2,1	-1,4
	0,0	330	0,33	2	-2,5	-2,1
	0,0	355	0,40	3	-2,7	-2,5
	0,0	140	0,15	1	-1,1	-0,6
	0,0	192	0,13	3	-1,4	-1,0
	0,0	390	0,47	2	-2,9	-2,6
13. V.	0,0	360	0,45	2	-2,7	-2,4
	0,0	140	0,133	1	-1,1	-0,6
	0,0	250	0,255	2	-1,9	-1,6
	0,0	350	0,351	2	-2,6	-2,3

Tabelle 7 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
15. V. 03	-0,1°	60	0,058	2'	-0,5°	-0,3°
		230	0,450	1	-1,7	-1,1
		380	1,000	1	-2,9	-2,6
"	-2,5	360	0,10	5	-2,7	-2,7
20. V.	0,0	180	0,65	30''	-1,2	-0,6
	0,0	285	0,80	40	-2,2	-1,5
	0,0	98	0,40	20	-0,75	-0,2
	0,0	210	0,15	3'	-1,6	-0,3
Öffnung 11,3 mm.						
21. IV. 03	-1,2°	345	0,37	3'	-2,6	-2,5
22. IV.	-1,0	328	0,583	2	-2,5	-2,3
	-0,5	192	0,116	3	-1,4	-1,2
		265	0,600	1	-2,0	-1,7
27. IV.	-0,2	295	0,590	1,5	-2,2	-2,0
	"	295	0,920	1	-2,2	-2,0
7. V.	-1,0	350	0,600	1,5	-2,6	-2,4
	0,0	290	1,030	1	-2,2	-2,0
9. V.	0,0	75	0,25	30''	-0,6	-0,2
		110	0,10	3'	-0,8	-0,5
		270	0,19	5	-2,0	-0,9
		96	0,133	1	-0,7	-0,35
		265	0,633	1	-2,0	-1,6
11. V.	-0,1	310	0,725	80''	-2,3	-2,1
12. V.	0,0	280	0,867	1'	-2,1	-1,9
"	0,0	180	0,125	1	-1,4	-0,8
		220	0,160	2	-1,7	-1,2
		300	0,720	3	-2,3	-2,3
13. V.	0,0	260	0,430	1	-2,0	-1,5
		275	0,370	2	-2,1	-1,8
	0,0	180	0,125	1	-1,0	-0,6
		205	0,191	2	-1,5	-1,2
		230	0,185	3	-1,7	-1,4
		280	0,375	4	-2,1	-2,0

Tabelle 7 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
14. V. 08	-0,3°	210	0,267	1'	-1,6°	-1,0°
		255	0,250	3	-1,9	-1,6
15. V.	-0,1	230	0,225	2	-1,7	-1,4
		330	0,52	1	-2,5	-2,2
22. V.	0,0	195	0,50	30"	-1,4	-0,7
		93	0,42	20	-0,7	-0,2
		275	0,93	40	-2,1	-1,6
29. V.	0,0	235	0,233	3'	-1,8	-1,5
30. V.	0,0	270	0,525	2	-2,0	-1,8
"	0,0	280	0,103	8	-2,1	-2,1
2. VI.	0,0	260	0,470	1	-2,0	-1,55
		200	0,20	1	-1,7	-1,00
		255	0,24	2	-1,9	-1,50
Öffnung 16 mm.						
18. IV.	-1,4	280	0,667	90"	-2,1	-1,9
21. IV.	-2,4	340	0,58	1,5'	-2,5	-2,5
23. IV.	-1,2	240	0,16	2	-1,8	-1,5
		265	0,130	3	-2,0	-1,7
	-1,0	250	0,175	5	-1,9	-1,8
	-1,7	275	0,933	1	-2,1	-2,0
24. IV.	-0,7	215	0,110	5	-1,6	-1,4
		285	0,583	1	-2,1	-1,6
25. IV.	-0,4	180	0,22	1	-1,4	-1,1
		210	0,08	5	-1,6	-1,3
		290	0,40	1	-2,2	-1,7
	-0,4	140	0,07	4	-1,1	-0,85
		250	0,23	1	-1,9	-1,4
1. V.	-0,5	290	0,75	1	-2,2	-2,0
	-0,5	290	1,22	50"	-2,2	-1,9
	-1,3	245	0,07	14'	-1,8	-1,8
	-1,6	175	0,07	4	-1,3	-1,4
	-1,5	245	0,16	2	-1,9	-1,75
	-1,3	280	0,333	1	-2,1	-1,8
	-1,0	350	0,475	40"	-2,6	-1,9
-0,2	205	0,075	6'	-1,5	-1,2	
		320	0,300	2	-2,4	-2,0

Tabelle 7 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Schmelz- druck- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
12. V. 08	0,0°	205	0,65	30"	-1,5°	-0,8°
	0,0	93	0,15	30	-0,7	-0,2
	0,0	305	0,10	8'	-2,3	-2,1
14. V.	-0,1	185	0,183	1	-1,4	-0,8
		210	0,146	2	-1,6	-1,0
		230	0,192	3	-1,7	-1,3
15. V.	-0,1	100	0,07	2	-0,75	-0,4
		280	0,94	35"	-2,1	-1,3
16. V.	-0,1	155	0,12	2'	-1,2	-0,6
		280	0,61	1	-2,1	-1,5
	0,0	245	0,27	2	-1,8	-1,4
18. V.	0,0	245	0,56	100"	-1,8	-1,5
20. V.	0,0	245	0,883	2'	-1,8	-1,5
23. V.	0,0	150	0,167	1	-1,2	-0,6
		240	0,167	2	-1,8	-1,2
		245	0,200	1	-1,9	-1,0
"	0,0	80	0,150	30"	-0,6	-0,2
		103	0,500	10	-0,8	-0,25
		208	0,750	20	-1,5	-0,8
26. V.	0,0	190	0,200	1'	-1,4	-0,8
27. V.	0,0	35	0,07	1	-0,3	-0,1
		220	0,253	1	-1,7	-1,1
		245	0,290	2	-1,9	-1,5
29. V.	0,0	190	0,200	1	-1,4	-0,8
		245	0,270	3	-1,9	-1,5
30. V.	0,0	190	0,200	1	-1,4	-0,8
		220	0,167	2	-1,7	-1,2
		235	0,183	4	-1,8	-1,4
Öffnung 19,2 mm.						
15. IV.	-1,2	280	0,25	1'	-2,1°	-1,7°
		250	0,25	2	-1,9	-1,7
		260	0,32	3	-2,0	-1,8
	-1,1	280	0,37	4	-2,1	-1,9
	-2,0	270	0,43	2,5	-2,0	-2,0
	-2,2	450	0,35	1	-3,4	-3,0
	-2,1	270	0,40	1,5	-2,0	-2,1

Tabelle 7 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Schmelz- druck- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
6. V. 08	-0,6°	270	0,44	1,5'	-2,0°	-1,5°
7. V.	-0,9	270	0,60	1,5	-2,0	-1,7
	0,5	270	0,58	1	-2,0	-1,7
8. V.	0,0	130	0,10	2	-1,0	-0,6
		220	0,10	3	-1,7	-1,1
		200	0,12	4	-1,5	-1,0
		130	0,16	1	-1,0	-0,5
	0,0	165	0,11	3	-1,2	-0,8
		220	0,16	2	-1,7	-1,0
		310	1,11	55"	-2,3	-2,0
9. V.	0,0	265	0,64	90	-2,0	-1,6
16. V.	0,0	85	0,07	2'	-0,6	-0,3
		310	1,05	1	-2,3	-1,9
18. V.	0,0	260	0,56	1,5	-2,0	-1,5
	0,0	260	0,81	1	-2,0	-1,4
19. V.	0,0	145	0,15	2	-1,1	-0,7
		220	0,18	3	-1,7	-1,2
		95	0,40	20"	-0,7	-0,2
	0,0	180	0,55	30	-1,4	-0,6
		220	0,60	30	-1,7	-0,9
20. V.	0,0	265	0,35	2'	-2,0	-1,5
26. V.	0,0	100	0,08	1	-0,7	-0,3
		150	0,07	3	-1,1	-0,6
		170	0,06	4	-1,3	-0,8
		230	0,92	40"	-2,1	-1,4
	0,0	110	0,13	1'	-0,8	-0,4
		225	0,22	1	-1,7	-0,9
27. V.	0,0	260	0,28	1	-2,0	-1,2
	0,0	150	0,12	2	-1,1	-0,6
		235	0,42	1	-1,8	-1,2
		265	0,71	35"	-2,0	-1,1
	0,0	110	0,11	1'	-0,8	-0,35
		240	0,43	1	-1,8	-1,2
		120	0,30	40"	-0,9	-0,4
	0,0	200	0,45	40	-1,5	-0,8
		210	0,80	30	-1,6	-0,8



Tabelle 7 (Fortsetzung).

Öffnung 22,3 mm.

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.	Wahrscheinl. Temp. des Eises
22. IV. 08	-1,5°	350	0,53	1,5'	-2,6°	-2,2°
2. V.	-0,7	340	1,17	1	-2,5	-2,9
	-1,0	310	0,41	3	-2,3	-2,0
5. V.	-1,0	270	0,30	3	-1,6	-1,4
8. V.	0,0	220	0,14	4	-1,6	-1,1
		310	0,36	4	-2,3	-1,7
9. V.	0,0	210	0,30	1	-1,6	-0,8
		245	0,35	1,5	-1,8	-1,1
14. V.	0,0	125	0,075	4	-1,0	-0,55
		330	1,000	50''	-2,5	-1,7
	-0,1	130	0,083	3'	-1,0	-0,6
		320	0,95	1	-2,4	-1,7
16. V.	0,0	180	0,12	2	-1,3	-0,7
		320	0,57	3	-2,4	-1,8
18. V.	0,0	320	0,86	70''	-2,4	-1,7
		250	0,18	4'	-1,9	-1,3
20. V.	0,0	95	0,20	30''	-0,7	-0,2
		98	0,45	20	-0,75	-0,2
		210	0,65	40	-1,60	-0,9
	0,0	90	0,10	80	-0,70	-0,3
		105	0,20	50	-0,80	-0,3
22. V.	0,0	50	0,07	1'	-0,4	-0,1
		75	0,083	1	-0,6	-0,2
	0,0	250	0,33	3	-1,9	-1,4
	0,0	270	0,53	1	-2,0	-1,2
		310	0,72	1	-2,3	-1,5
23. V.	0,0	170	0,17	1	-1,3	-0,6
		200	0,18	2	-1,5	-0,9
		250	0,22	3	-1,9	-1,3
		320	0,35	4	-2,4	-1,8
	0,0	280	0,11	6	-2,1	-1,8
	0,0	305	0,175	7	-2,3	-2,0
26. V.	0,0	120	0,15	1	-0,9	-0,4
		180	0,13	2	-1,3	-0,75
		185	0,11	3	-1,4	-0,8
		320	0,50	105''	-2,4	-1,7
1. VI.	0,0	300	1,00	1'	-1,9	-1,4
	0,0	100	0,31	1	-0,75	-0,4
		205	0,25	2	-1,5	-0,9

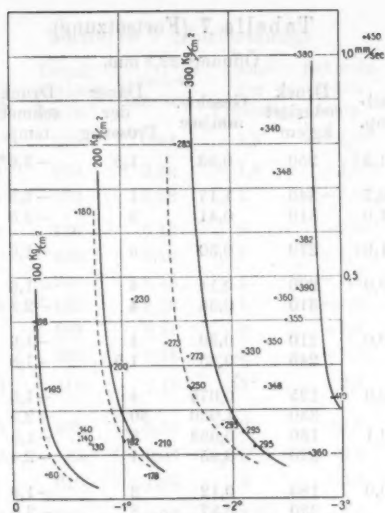


Fig. 4. Öffnung 8 mm.

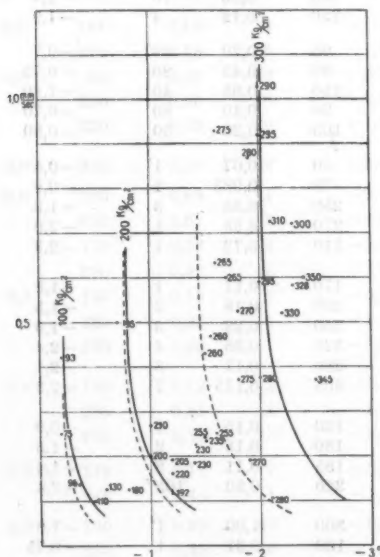


Fig. 5. Öffnung 11,3 mm.

Für eine bessere Temperaturkorrektur wäre ohne Zweifel der Einfluß der in das Innere des Stempelrohres dringenden Eismasse zu berücksichtigen; sichere Anhaltspunkte über die Wärmeverhältnisse dieser Eismasse habe ich bei meinen Experimenten nicht erhalten. Der Versuch nach dieser Richtung die Korrektur zu verfeinern, würde sich also auf mehr oder minder zutreffende Annahmen stützen müssen und trotz verwickelter Rechnungen kaum zu einer Erhöhung der Genauigkeit führen; er wurde deshalb unterlassen.

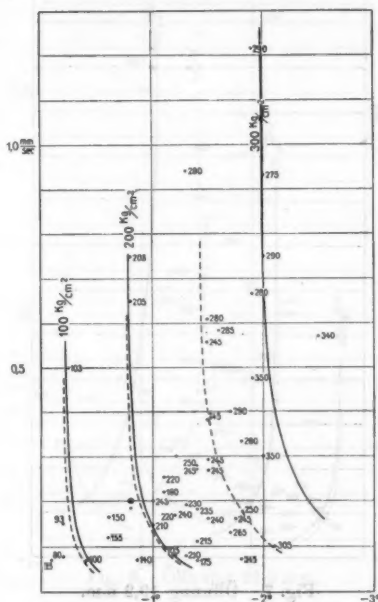


Fig. 6. Öffnung 16,2 mm.

Auch für die einzelnen Ausflußöffnungen ergibt sich aus den Figg. 4—8 deutlich die Krümmung der Isobaren im gleichen Sinne, wie bei der Schmelzfläche, d. h. auch in diesen Fällen tritt bereits ein Schmelzen des Eises ein, bevor der theoretische Schmelzdruck erreicht ist. Zur Erklärung dieser Erscheinung darf die Zusammendrückbarkeit des Eises jedenfalls nur nebenher herangezogen werden. Der wesentliche Grund dafür scheint

mir in der Wärmezufuhr zu liegen, welche der Stempel vermittelt. Die Deckplatte der hydraulischen Presse, gegen welche die Stempel fest anliegen, hat immer eine höhere Temperatur, als das gepreßte Eis. Im Stempel wird daher kurze Zeit, nachdem die Pressung in Gang ist, eine Wärmeströmung von der Presse zum Eis stattfinden und da die Experimente, welche den kleinen Vorrückungsgeschwindigkeiten des Stempels entsprechen, längere Zeit beanspruchen, wenn die Verschiebung

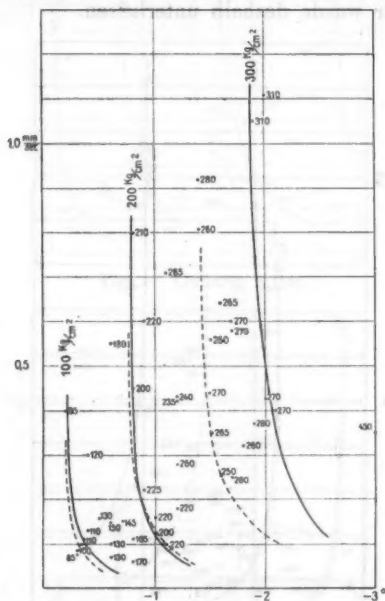


Fig. 7. Öffnung 19,2 mm.

meßbar werden soll, so muß sich der Einfluß des Stempels gerade bei diesen Versuchen am stärksten bemerkbar machen, während für die großen Geschwindigkeiten, bei denen gleich anfangs relativ starke Drucke einsetzen, trotz des größeren Temperaturgefälles dieser Einfluß weniger ins Gewicht fällt; daher auch der asymptotische Anschluß der praktischen Schmelzfläche an die theoretische, der bei den großen Geschwindigkeiten auftritt.

Der aus den durchlochten Stempeln austretende Eiskern war bei Temperaturen nahe an  $0^{\circ}$  stark wasserhaltig (bei niedrigen Temperaturen zeigte sich nur wenig oder gar kein Wasser mehr in diesem Kerne); häufig war aber der ganze Eiskern außen von einem dünnen ( $\frac{1}{2}$  mm dicken) Eisrohr zusammengehalten, während nach dem Innern hin sich eine Teilung in parallele Platten bemerklich machte; zwischen den nach außen hin klaffenden Rändern dieser

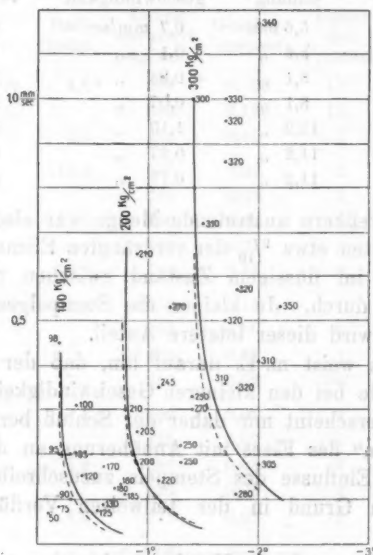


Fig. 8. Öffnung 22,8 mm.

Platten und dem dünnen Rohr wurden die Wassereinschlüsse gehalten. (Dies Aussehen des Eiskernes habe ich bereits früher erwähnt; auch v. Obermayer hat es bemerkt.) Es muß also während der Pressung das durch die Stempelöffnung geförderte Eis in den axialen Partien, da wo der stärkste Zug auftritt (also nahe den Kanten des Stempels), zerreißen; das unter der Druckfläche des Stempels gebildete unterkühlte Schmelzwasser dringt in die entstandenen Risse ein, gefriert bei Entlastung

wieder und bildet damit das Rohr, das den an den Rändern zerrissenen Eiskern umschließt.

In einigen Fällen wurde durch Wägung des Eiskernes, der über die Form hinausragte und des im Stempelhalse sitzenden Stückes die Menge des durch das Stempelrohr hindurch gegangenen Materials im Verhältnis zu der vom Stempel verdrängten Eismenge bestimmt. Ich fand

Bad- temperatur	Ausfluß- öffnung	Stempel- geschwindigkeit	Mengen- verhältnis
-0,2°	5,6 mm	0,7 mm/sec	44 %
-0,1	5,6 "	0,1 "	10 "
-0,2	8,1 "	0,83 "	90 "
-0,2	8,1 "	0,07 "	23 "
-0,1	11,2 "	1,10 "	94 "
-0,1	11,2 "	0,27 "	42 "
-0,1	11,2 "	0,11 "	20 "

Die als Preßkern austretende Menge war also bei großen Geschwindigkeiten etwa  $\frac{9}{10}$  der verdrängten Eismasse;  $\frac{1}{10}$  der letzteren ging im flüssigem Zustand zwischen Stempel und Formwandung durch. Je kleiner die Stempelgeschwindigkeit um so größer wird dieser letztere Anteil.

Auch dies weist m. E. darauf hin, daß der Einfluß des Stempels gerade bei den kleineren Geschwindigkeiten ziemlich groß ist. Es erscheint mir daher der Schluß berechtigt, daß das „Erweichen“ des Eises mit Annäherung an den Schmelzpunkt diesem Einflusse des Stempels zuzuschreiben ist, daß es also seinen Grund in der teilweisen Verflüssigung des Eises hat.

Die hier besprochenen Ergebnisse beziehen sich allerdings zumeist auf Eis von nahezu 0°, das bei Druckeinwirkung seinen Zustand längs der Schmelzkurve ändert. Daß aber auch für Eis von niedrigerer Temperatur die Verhältnisse im wesentlichen ebenso liegen, zeigen die Ausflußversuche von 1906, von denen ich hier in Tab. 8 einige anführe. Die damals verwendeten Preßformen hatten, wie oben erwähnt wurde, nahe dem Boden seitliche Ausflußöffnungen; der ganze Vorgang der Bewegung des Eises ist hier deshalb viel verwickelter, als bei den später verwendeten Stempeln. Man bemerkt jedoch, daß anfänglich bedeutende Drucke anzuwenden waren, um das Eis

zum Ausfließen zu bringen. Je nach der Geschwindigkeit, mit welcher der Stempel in die Form eindrang, waren diese Drucke nahezu gleich, oder über dem Schmelzdruck, welcher der Badtemperatur entspricht. Nur bei ganz kleinen Geschwindigkeiten, also wenn der Einfluß des Stempels stark zur Geltung kam, lagen diese Anfangsdrucke relativ niedrig.

Tabelle 8.

Ausflußöffnung 11,15 mm.

Tag	Badtemp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.
6. III. 06	- 4,0°	680	0,103	15"	- 5,2°
		580	0,165	15	- 4,3
	- 3,5	426	0,45	1'	- 3,2
24. III.	- 19,0	960	0,02	2	- 7,1
		760	0,02	2	- 5,7
	- 17,0	790	0,03	2	- 5,9
		790	0,07	3	- 5,9
	- 15,0	750	0,16	4	- 5,6
31. III.	- 9,0	750	0,13	1	- 5,6
		495	0,20	1	- 3,7
		420	0,22	1	- 3,2
	- 7,0	360	0,22	90"	- 2,7
1. IV.	- 5,4	690	0,07	2'	- 5,2
		410	0,07	2	- 3,1
	- 4,5	290	0,03	2	- 2,2
		210	0,03	2	- 1,8
	- 3,6	175	0,03	2	- 1,3

Ausflußöffnung 22,25 mm.

26. III. 06	- 18,0	1400	0,03	2'	- 10,5
		1210	0,10	2	- 9,2
	- 16,4	1050	0,12	2	- 7,9
		975	0,10	2	- 7,4
	- 15,0	840	0,10	2	- 6,3
27. III.	- 14,0	1400	0,23	30"	- 10,5
		1205	0,32	"	- 9,1
	- 13,2	1110	0,32	"	- 8,3
		1090	0,32	"	- 8,2
	- 12,0	1035	0,32	"	- 7,8
		975	0,32	"	- 7,3

Tabelle 8 (Fortsetzung).

Tag	Bad-temp.	Druck reduziert kg/cm <sup>2</sup>	Geschw. mm/sec	Dauer der Pressung	Druck- schmelz- temp.
30. III. 06	-7,5°	1450	0,33	30"	-10,9°
		1000	0,40	"	-7,5
	-7,0	750	0,50	"	-5,6
		710	0,43	"	-5,3
	-6,5	650	0,43	"	-4,9
"	-5,0	650	0,57	"	-4,9
		530	0,63	"	-4,0
	-4,5	470	0,67	"	-3,5

Auch in diesen Fällen erscheint es gerechtfertigt, das „Erweichen“ des Eises auf die Bildung von Schmelzwasser zurückzuführen. Die austretenden Eiskerne waren bis zur Badtemperatur von -10° wasserhaltig; erst bei noch tieferen Temperaturen kamen völlig weiße (nicht klar durchsichtige) am Rande zerklüftete Kerne aus der Form.

Als allgemeines und hauptsächliches Ergebnis der vorliegenden Untersuchung folgt also:

*Die Plastizität des Eises ist durch die Wassermenge bedingt, welche es eingeschlossen enthält.*

Diese Wassermenge kann, wenn das Eis seinen Zustand adiabatisch längs der Schmelzkurve ändert, berechnet werden. Ist  $\mu$  der flüssige Anteil der Gewichtseinheit eines Eis-Wassergemisches, so besteht die Gleichung

$$\mu = \frac{C}{q} \cdot T \lg \frac{273}{T},$$

in welcher  $C$  die spezifische Wärme des Eises bei dem veränderlichen Druck bedeutet, der für die absolute Temperatur  $T$  aus der Gleichung der Schmelzkurve folgt;  $q$  ist die zugehörige Schmelzwärme des Eises.<sup>1)</sup> Verwendet man die p. 454 angegebenen Werte, so erhält man die Interpolationsformel

$$\mu = -0,007 t + 0,0004 t^2,$$

in welcher die Temperatur  $t$  der hundertteiligen Skala entspricht.

1) Vgl. u. A. Chwolson, Lehrbuch 3. p. 601 u. 674.



Das vom Eis eingeschlossene Wasser müßte man sich wohl in den Haarspalten verteilt denken, welche die einzelnen Kristalle bzw. Eiskörner voneinander trennen, oder die unter Druckwirkung zwischen den Plättchen entstehen, aus denen ein Eiskristall aufgebaut ist (Translation; Forelsche Streifen). Eine Wassermenge von mehreren  $\text{dm}^3$ , oder auch  $\text{m}^3$  dagegen, welche als Ganzes einen Hohlraum in einer entsprechend großen Eismasse ausfüllt, wird diese nicht wesentlich plastischer machen, als sie es ohne Wassermenge wäre.

Die Frage, welche die direkte Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit war, nämlich: „warum wächst die Ausflußgeschwindigkeit des Eises bei konstantem Druck und konstanter Temperatur?“ darf nach den Resultaten, zu denen ich komme, dahin beantwortet werden: weil durch den Druck eine gewisse Eismenge verflüssigt wird, das Schmelzwasser ganz oder teilweise in die zwischen den einzelnen Eiskörnern bestehenden Haarspalten eindringt und damit die Plastizität des Eises erzeugt. Je größer der Anteil des Wassers pro Gewichtseinheit des Eis-Wassergemisches wird, um so mehr nimmt die Plastizität zu, um so mehr muß also die Ausflußgeschwindigkeit anwachsen, wenn auch der auf dem Eise lastende Druck ungeändert bleibt.

Von den Beobachtungsergebnissen soll noch das besondere Erwähnung finden, welches sich auf die Dauer der Druckeinwirkung bezieht. Es hat sich gezeigt, daß die Werte, welche man für die Schmelzdrucke bei Temperaturen nahe an  $0^\circ$  erhält, sich um so mehr den theoretischen nähern, je kürzer der Zeitraum ist, auf den sich eine Messung erstreckt, da dann die durch den Druck bewirkte Temperaturerniedrigung und die aus dieser wieder folgende Drucksteigerung in immer engeren Grenzen gehalten werden. Dies steht in engem Zusammenhang mit den Beobachtungsergebnissen über Elastizität und innere Reibung des Eises, welche ich 1902 veröffentlicht habe.<sup>1)</sup> Ich habe damals als ein Resultat (auf p. 422) angeführt:

Bei mäßiger Belastung wächst der Koeffizient der inneren Reibung mit der Dauer des Zwanges und zwar nach 5 Minuten

1) Vgl. H. Hess, *Ann. d. Phys.* 8. p. 405 u. f. 1902.

langer Dauer ungefähr proportional der Zeit, während für kürzere Dauer der Beanspruchung die Zunahme dieses Koeffizienten durch ein verwickeltes Gesetz geregelt erscheint.

Für diese kurz dauernden Belastungen ergab sich nämlich ein rascheres Anwachsen des Koeffizienten der inneren Reibung. Der Grund dafür liegt wohl in den Temperaturänderungen, denen das der Deformation unterworfenen Eis an den Belastungsstellen unterworfen ist; sie sind bei Beginn der Belastung wesentlich größer, als nach einiger Dauer derselben. Es wäre nicht ohne Interesse, sie experimentell zu verfolgen.

Was nun die Verwendbarkeit des Hauptresultates dieser Arbeit für die Theorie der Gletscherbewegung anlangt, so ist diese nach zwei Richtungen möglich; 1. auf Vorgänge im Inneren der Gletschermasse und 2. auf Vorgänge an der Gletschersohle.

1. Im Gletscher herrscht (wenigstens im Abschmelzgebiet) die dem (Vertikal-)Druck entsprechende Schmelztemperatur. Hier hat man es auch mit adiabatischen Zustandsänderungen zu tun; es wird also das Eis in den verschiedenen Tiefen pro Gewichtseinheit verschieden große Wassermengen enthalten, die sich aus der Formel p. 488

für	11,0 m	zu	0,047 g/dm <sup>3</sup>	
"	22	"	0,094	"
"	110	"	0,471	"
"	220	"	0,942	"
"	440	"	1,884	"

ergeben. Sie sind fast doppelt so groß, als ich sie 1904 in „Die Gletscher“ p. 320 angegeben habe. Da zur Berechnung dieser Wassermengen die Änderungen der Schmelzwärme und der spezifischen Wärme des Eises, welche mit Temperaturänderungen auftreten, bereits berücksichtigt sind, so ist es völlig berechtigt, die Plastizität der Gletschermasse auf die Wassermengen zurückzuführen, welche das gedrückte Eis zwischen den einzelnen Gletscherkörnern eingeschlossen enthält. Die Zerklüftung des Gletschers, welche nach Ansicht hervorragender früherer und jetzt lebender Physiker die Ursache der Plastizität des Gletschereises sein soll, ist vielmehr ein Zeichen des Mangels und der großen Unterschiede der

Plastizität, welche innerhalb der Gletschermasse, an den Rand- und Oberflächengebieten auftreten. Das Eis dieser letztgenannten Gletscherteile steht unter geringen Drucken, enthält also weniger Wasser und ist daher auch spröder, als das Eis der axial und tief liegenden Teile.

Die Verschiebbarkeit der Gletscherkörner gegeneinander (auch die Plastizität der einzelnen Körner) muß gegen die Gletschersohle zunehmen. Ob hier eine der Zunahme der Wassermenge direkt proportionale Zunahme dieser Verschiebbarkeit auftritt, oder ob die letztere rascher anwächst, wird sich erst feststellen lassen, wenn auf Grund der neuen Geschwindigkeits- und Ablationsmessungen, sowie der Ergebnisse der Tiefbohrungen auf dem Hintereisgletscher beim sorgfältigen Studium der Strömung dieser Eismasse die Grundgeschwindigkeiten und die Änderung der Geschwindigkeit mit der Tiefe hinreichend sicher gefunden werden können. Darf man sich auf den einfachsten Fall, den direkter Proportionalität, beschränken, so ergibt sich, daß die Geschwindigkeitsabnahme gegen die Tiefe dem Quadrate der Eistiefe proportional erfolgt.

Die im Inneren des Gletschers, zwischen den Körnern vorhandene Wassermenge ist auch die Ursache der raschen Ausbreitung von Druckschwankungen, welche im Firngebiet durch zeitliche Änderung der Niederschlagsmengen auftreten. Diese rasche Ausbreitung ist am Rhonegletscher und besonders durch Blümekes und Finsterwalders Messungen der jahreszeitlichen Geschwindigkeitsschwankungen am Hintereisferner nachgewiesen.

Die im Haarspaltennetz des Gletschers eingeschlossene, mit den Druckschwankungen veränderliche Wassermenge ist auch die Ursache davon, daß beim vorschreitenden Gletscher die Schwellung der Zunge dem aus dem Firngebiet kommenden Massenzuwachs stark voraneilt.

2. Auf der Gletschersohle befindet sich die Eismasse unter ähnlichen Bedingungen, wie das Eis in den Preßformen bei den Versuchen, über welche hier berichtet wurde, d. h. es findet Wärmezufuhr vom Gletscherbett aus statt, gegen welches das Eis beständig hinabsinkt. Das Gletscherbett vertritt also die Rolle des Stempels bei den Versuchen. Die Schmelzfläche des Eises muß daher für diesen praktischen Fall bei der

Temperaturenachse ähnliche Abweichungen gegenüber der theoretischen Fläche zeigen, wie bei meinen Versuchen, wenn sie auch wegen der veränderten Wärmeleitungsverhältnisse quantitativ andere, meistens wohl kleinere sind. Es muß also schon bei Drucken, die unterhalb des theoretischen Schmelzdruckes liegen, eine gewisse Schmelzgeschwindigkeit auftreten. Rechnet man mit plausiblen Annahmen (da es an genügend sicheren Daten fehlt) so findet man, daß z. B. für eine Schmelzgeschwindigkeit kleiner als 0,0001 mm/sec die Drucke annähernd um  $\frac{1}{6}$  kleiner werden, als die theoretischen Schmelzdrucke bei einer Tiefe des Gletschers von mehr als 600 m (bei geringeren Tiefen reduziert sich die Druckminderung auf etwa  $\frac{1}{10}$  des Schmelzdruckes). Die Überdrucke sind (über die Eisdicke hinaus, welche durch Wärmezufuhr aus der Erde geschmolzen wird) zum Schmelzen des Eises verfügbar. Die Eismenge, welche geschmolzen wird, hängt nur davon ab, mit welcher Geschwindigkeit das Eis an den einzelnen Stellen nachsinken kann, um an die Stelle der weggeschmolzenen Massen zu kommen. Je tiefer aber eine Eisschicht ist, um so größer wird diese Geschwindigkeit. Daraus folgt, daß sehr dicke Eisdecken wegen der Abschmelzung, die sie durch ihr eigenes Gewicht an ihrer Sohle verursachen, rasch einsinken. —

Wo das Bett eines Gletschers eine beträchtliche Querschnittsminderung für die strömende Masse bedingt, wird ein Austauen an den Rändern eintreten; der Druck nimmt zu, die Plastizität der axialen Teile und damit deren Strömungsgeschwindigkeit wächst an; im Randgebiet muß jedoch ein reichliches Abschmelzen des Eises eintreten. Das unterkühlte Schmelzwasser wird zur subglazialen Verwitterung des widerstehenden Gesteines wesentlich beitragen, so daß das Bewegungshindernis relativ rascher Zerstörung unterworfen ist.

Nürnberg, Realgynasium, Juli 1911.

(Eingegangen 28. Juli 1911.)

**2. Über die Mechanik des deformierbaren  
Körpers  
vom Standpunkte der Relativitätstheorie;  
von G. Herglotz.**

Der nachfolgende Versuch, die klassische Mechanik des deformierbaren Körpers im Sinne der Relativitätstheorie zu modifizieren, ist die Weiterführung eines seinerzeit gelegentlich der Beschäftigung mit dem relativ starren Körper gebildeten — sich übrigens ganz von selbst anbietenden — Ansatzes der Bewegungsgleichungen, zu dessen Ausarbeitung und Veröffentlichung ich — nach den in der Theorie des relativ starren Körpers zutage getretenen Verhältnissen — erst in diesem Frühjahr durch die Tatsache veranlaßt wurde, daß sich jene Bewegungsgleichungen der von Hrn. M. Laue aus anderem Gesichtspunkte her gegebenen allgemeinen Form<sup>1)</sup> einordnen. Diese Vergleichung veranlaßte überdies die Ausdehnung des Ansatzes auch auf nicht-adiabatische Bewegungen, so daß ich Hrn. M. Laue nach beiden Richtungen hin zu herzlichstem Dank für seine mir damals gemachten Mitteilungen verpflichtet bin.

Die Annahme, von der die vorliegenden Betrachtungen ausgehen, ist in Verfolgung der von Hrn. M. Planck in seinen Arbeiten<sup>2)</sup> über das Prinzip der kleinsten Wirkung eingeschlagenen Richtung die, daß für die Bewegung des Körpers ein kinetisches Potential existiert, welches erstens den Lorentztransformationen gegenüber invariant (bei homogener Schreibweise) ist, und sich zweitens im Falle der Ruhe auf eine gegebene Funktion der Deformationen und der Entropie des einzelnen Volumelementes reduziert, wodurch sofort auch

1) Inzwischen erschienen in der Schrift „Das Relativitätsprinzip“, Braunschweig 1911, und in den Ann. d. Phys. 35. p. 524. 1911.

2) M. Planck, Berl. Ber. 1907. p. 542; Ann. d. Phys. 26. p. 1. 1908.

sein allgemeiner Ausdruck bestimmt ist (§ 5). Insbesondere erhellt, daß im Falle der Bewegung die Ruhedeformationen (§§ 1, 2) maßgebend sind, d. i. jene Deformationen, welche das Volumelement nach Rückgängigmachung der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Lorentzkontraktion seiner Normalgestalt gegenüber aufweist.<sup>1)</sup>

Aus der ersten Variation dieses kinetischen Potentials fließen nun sofort die Bewegungsgleichungen, zunächst in der Lagrangeschen (§ 6), dann in der Eulerschen Form (§ 7). In der letzteren sind sie formal mit jenem System identisch, das Hr. M. Abraham seinen Untersuchungen<sup>2)</sup> über die Elektrodynamik bewegter Körper an die Spitze gestellt hat, aus welcher Vergleichung die Bedeutung der in ihnen auftretenden 16-gliedrigen Matrix zu entnehmen ist. Die zehn Relationen (§ 7), welche die Symmetrieeigenschaften jener Matrix und die Verknüpfung von Impuls, Energie und Spannung untereinander zum Ausdruck bringen, ergeben sich einfach als das vollständige System partieller Differentialgleichungen (§ 3), denen das kinetische Potential seiner durch obige beiden Annahmen bedingten Form zufolge genügen muß.

Der 10-gliedrigen Gruppe von „Bewegungen“ im  $(x, y, z, t)$ -Raum entsprechend gelten für die Bewegung des ganzen Körpers zehn allgemeine Integrale (§ 9), und zwar den vier Translationen entsprechend, die drei Impulssätze und der Energiesatz, den sechs Drehungen entsprechend aber einmal die drei Flächensätze, und dann drei weitere, diesen — zufolge der Gleichberechtigung von  $x, y, z, t$  — völlig analog gebildete Gleichungen, die mit den einmal integrierten Schwerpunktsätzen der klassischen Mechanik in Parallele zu setzen sind. Für kräftefrei-adiabatische Bewegungen insbesondere folgt aus ihnen, daß sich der Energiemittelpunkt — welcher sonach hier den Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt vertritt — geradlinig gleichförmig bewegt und daß seine Geschwindigkeit, mit der Gesamtenergie multipliziert, den Gesamtimpuls liefert.

1) Diese Bemerkung bereits bei M. Born, Ann. d. Phys. 30. p. 1. 1909.

2) M. Abraham, Rendiconti del circolo mat. di Palermo 28. p. 1. 1909.

Hängt das Ruhpotential nur von Entropie und Volumen ab, so erhält man den Fall einer idealen Flüssigkeit mit allseitig gleichem Druck (§ 10) und aus der Weberschen Form der hydrodynamischen Gleichungen ergeben sich die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen für die Hydrodynamik der Relativitätstheorie (§ 11).

Knüpfen die Betrachtungen des ersten Teiles an die erste Variation des kinetischen Potentials an, so sind die des zweiten Teiles — über den Trägheitswiderstand und die Wellenmechanik — von der zweiten Variation desselben abhängig. Für das einzelne Volumelement hängen die Komponenten des Trägheitswiderstandes mit den Komponenten der diesen weckenden Beschleunigung durch eine lineare Transformation mit symmetrischer Determinante zusammen, deren sechs Koeffizienten als die Trägheitskoeffizienten oder Massendichten an der betreffenden Stelle des Körpers bezeichnet werden können. Will man nun nicht in jeder Richtung der gewöhnlichen Auffassung völlig entgegengesetzte<sup>1)</sup> Verhältnisse finden, so muß dem Postulate positiver Massen in der klassischen Mechanik analog die Forderung gestellt werden, daß die mit den sechs Trägheitskoeffizienten gebildete quadratische Form  $\Gamma$  — einfach die zweite Variation des kinetischen Potentials nach der Geschwindigkeit — definit positiv sein soll, oder daß, anschaulich ausgedrückt, der Trägheitswiderstand stets einen stumpfen Winkel mit der Beschleunigung bilden soll (§ 1).

Die Gesetze der Wellenmechanik werden (§ 4) durch eine andere quadratische Form  $W$  — einfach die vollständige zweite Variation des kinetischen Potentials — geliefert und es erweisen sich nun die beiden Formen  $\Gamma$  und  $W$  auf Grund ihrer Darstellungen (§§ 2, 3 und 5) als wechselweise auseinander ableitbar. Aus diesem allgemeinen Zusammenhang folgt, daß die an den Trägheitswiderstand gestellte Forderung die Unmöglichkeit von Wellen mit Überlichtgeschwindigkeit nach sich zieht, hierzu aber auch wirklich notwendig ist (§ 6).

Reduzieren sich die sechs Trägheitskoeffizienten auf nur zwei — einen longitudinalen und einen transversalen —,

1) Es wäre z. B. der hyperbolische Charakter der Bewegungsgleichungen nicht für alle Fälle sichergestellt (vgl. Anm. 1, p. 518).



so sind in dem Körper nur Longitudinal- und Transversalwellen mit nach allen Richtungen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit möglich und umgekehrt (§ 7). Dabei lassen sich die beiden Trägheitskoeffizienten und die beiden Wellengeschwindigkeiten wechselseitig auseinander ableiten.

Diese speziellen Verhältnisse sind bei der idealen Flüssigkeit (§ 8) — bei welcher aber die Geschwindigkeit der Transversalwellen Null wird — und bei dem elastischen isotropen Körper (§ 9) für verschwindende Ruhdeformationen realisiert. Bei letzterem ergibt die an den Trägheitswiderstand gestellte Forderung obere, durch die Ruhmassendichte gegebene Grenzen für die beiden Elastizitätskoeffizienten.

### Erster Teil.

#### Das kinetische Potential und die Bewegungsgleichungen.

##### § 1. Die Ruhdeformationen.

Man denke einen deformierbaren Körper sich irgendwie bewegend. Das Teilchen, dem im Normalzustande des Körpers die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  zukommen, befinde sich zur Zeit  $t$  an der Stelle  $x, y, z$  des Raumes:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta, t) \\ y = y(\xi, \eta, \zeta, t) \\ z = z(\xi, \eta, \zeta, t). \end{cases}$$

Die Formeln homogen zu gestalten, mag in dem Körper irgendwie eine Art Ortszeit:

$$(2) \quad \tau = \tau(\xi, \eta, \zeta, t), \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0$$

eingeführt werden, und gesetzt sein:

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = x, & x_2 = y, & x_3 = z, & x_4 = t, \\ \xi_1 = \xi, & \xi_2 = \eta, & \xi_3 = \zeta, & \xi_4 = \tau, \end{cases}$$

wonach sich statt (1) gleichmäßiger schreiben läßt:

$$(4) \quad x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$



Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten der  $x_i$  nach den  $\xi_j$  mit  $a_{ij}$ :

$$(5) \quad a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

so daß

$$(6) \quad dx_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij} d\xi_j$$

wird, dann ist, unter  $s, u, v, w$  die Geschwindigkeit des Teilchens und deren Komponenten verstanden:

$$(7) \quad \frac{a_{11}}{a_{44}} = u, \quad \frac{a_{21}}{a_{44}} = v, \quad \frac{a_{31}}{a_{44}} = w, \quad a_{44} = \frac{\partial x}{\partial t} > 0$$

und bei durchgängiger Voraussetzung von Unterlichtgeschwindigkeit ( $c = 1$ ) stets:

$$(8) \quad s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} < 1.$$

Diejenige Lorentztransformation, welche die Geschwindigkeit des Teilchens auf Null bringt — die „Ruhtransformation“ — führt  $x, y, z, t$  über in:

$$(9) \quad \begin{cases} x^0 = x + \alpha u (ux + vy + wz) - \beta ut \\ y^0 = y + \alpha v (ux + vy + wz) - \beta vt \\ z^0 = z + \alpha w (ux + vy + wz) - \beta wt \\ t^0 = -\beta (ux + vy + wz) + \beta t. \end{cases}$$

$$(10) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}(1+\sqrt{1-s^2})}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

und die zu ihr inverse Transformation wird einfach durch Vertauschung der  $x, y, z, t$  und  $x^0, y^0, z^0, t^0$  unter gleichzeitiger Vorzeichenänderung der  $u, v, w$  erhalten.

Gehen vermöge der Ruhtransformation die  $dx_i$  über in  $dx_i^0$ :

$$(11) \quad dx_i^0 = \sum_{j=1}^4 a_{ij}^0 d\xi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

so ist:

$$(12) \quad \begin{cases} a_{1i}^0 = a_{1i} + \alpha u (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) - \beta ua_{4i} \\ a_{2i}^0 = a_{2i} + \alpha v (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) - \beta va_{4i} \\ a_{3i}^0 = a_{3i} + \alpha w (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) - \beta wa_{4i} \\ a_{4i}^0 = -\beta (ua_{1i} + va_{2i} + wa_{3i}) + \beta a_{4i} \end{cases}$$

und im besonderen:

$$(13) \quad a_{14}^0 = a_{24}^0 = a_{34}^0 = 0, \quad a_{44}^0 = a_{44} \sqrt{1-s^2} = \sqrt{-A_{44}} > 0.$$

Sei nunmehr:

$$(14) \quad dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2de^2,$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} de^2 &= e_{11} d\xi^2 + e_{22} d\eta^2 + e_{33} d\zeta^2 \\ &+ 2e_{23} d\eta d\zeta + 2e_{31} d\zeta d\xi + 2e_{12} d\xi d\eta, \end{aligned} \right.$$

also:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} 1 + 2e_{11} &= a_{11}^{0^2} + a_{21}^{0^2} + a_{31}^{0^2} \\ 1 + 2e_{22} &= a_{12}^{0^2} + a_{22}^{0^2} + a_{32}^{0^2} \\ 1 + 2e_{33} &= a_{13}^{0^2} + a_{23}^{0^2} + a_{33}^{0^2} \\ e_{23} = e_{32} &= \frac{1}{2}(a_{12}^0 a_{13}^0 + a_{22}^0 a_{23}^0 + a_{32}^0 a_{33}^0) \\ e_{31} = e_{13} &= \frac{1}{2}(a_{13}^0 a_{11}^0 + a_{23}^0 a_{21}^0 + a_{33}^0 a_{31}^0) \\ e_{12} = e_{21} &= \frac{1}{2}(a_{11}^0 a_{12}^0 + a_{21}^0 a_{22}^0 + a_{31}^0 a_{32}^0), \end{aligned} \right.$$

so geben die  $e_{ij}$  — die „Ruhdeformationen“ — diejenige Deformation an, welche die „Ruhgestalt“ eines Volumelements seiner Normalgestalt gegenüber aufweist, oder seine tatsächliche Deformation abzüglich der seiner Geschwindigkeit entsprechenden Lorentzkontraktion.

Für ein ruhendes Volumelement fallen die  $e_{ij}$  mit den in üblicher Weise definierten tatsächlichen Deformationen desselben zusammen.

Da die Determinante der Ruhtransformation +1 ist, sind die Determinanten der  $a_{ij}$  und  $a_{ij}^0$  einander gleich:

$$(16) \quad D = \frac{\partial(x, y, z, t)}{\partial(\xi, \eta, \zeta, \tau)} = |a_{ij}| = |a_{ij}^0|, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Wegen (13) aber ist  $|a_{ij}^0| = \Delta a_{44}^0$ , falls

$$(17) \quad \Delta = |a_{ij}^0|, \quad i, j = 1, 2, 3$$

das Verhältnis zwischen Ruhvolumen und Normalvolumen bezeichnet, so daß:

$$(18) \quad D = \Delta \sqrt{-A_{44}}.$$

Das Verhältnis zwischen tatsächlichem Volumen und Normalvolumen aber ist durch  $D/a_{44}$  gegeben.

Noch mag man die aus der Beziehung (14) abzulesende Darstellung:

$$(17') \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2e_{11} & 2e_{12} & 2e_{13} \\ 2e_{21} & 1 + 2e_{22} & 2e_{23} \\ 2e_{31} & 2e_{32} & 1 + 2e_{33} \end{vmatrix}$$

bemerken.

### § 2. Zweite Darstellung der Ruhdeformationen.

Die quadratische Differentialform:

$$(19) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = \sum_{i,j} A_{ij} d\xi_i d\xi_j,$$

$$(20) \quad \begin{cases} A_{ij} = a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + a_{3i}a_{3j} - a_{4i}a_{4j}, & i, j = 1, 2, 3, 4, \\ A_{44} = -a_{44}^2(1 - s^2) < 0, \end{cases}$$

und die lineare Differentialform:

$$(21) \quad dv = a_{14}dx + a_{24}dy + a_{34}dz - a_{44}dt = \sum_i A_{i4}d\xi_i$$

gehen wegen ihrer Invarianz bezüglich der Lorentztransformationen bei Einführung der  $dx_i^0$  an Stelle der  $dx_i$  über in:

$$(19') \quad ds^2 = dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2} - dt^{0^2},$$

$$(21') \quad dv = -a_{44}^0 dt^0,$$

so daß

$$(22) \quad ds^2 - \frac{1}{A_{44}} dv^2 = dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2}.$$

Vermöge (14) folgen hieraus die neuen Ausdrücke der Ruhdeformationen:

$$(16') \quad \begin{cases} 1 + 2e_{11} = A_{11} - \frac{A_{14}^2}{A_{44}}, & e_{23} = e_{32} = \frac{1}{2} \left( A_{23} - \frac{A_{24}A_{34}}{A_{44}} \right), \\ 1 + 2e_{22} = A_{22} - \frac{A_{24}^2}{A_{44}}, & e_{31} = e_{13} = \frac{1}{2} \left( A_{31} - \frac{A_{34}A_{14}}{A_{44}} \right), \\ 1 + 2e_{33} = A_{33} - \frac{A_{34}^2}{A_{44}}, & e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2} \left( A_{12} - \frac{A_{14}A_{24}}{A_{44}} \right). \end{cases}$$

§ 3. Das vollständige System von zehn partiellen Differentialgleichungen für eine beliebige Funktion der Ruhdeformationen.

Welches sind nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich eine Funktion  $\Omega(a_{ij})$  der 16 Größen  $a_{ij}$  durch die 6 Ruhdeformationen  $e_{ij}$  allein ausdrücken läßt?

Denkt man für den Augenblick eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit  $R_4(X_1, X_2, X_3, X_4)$  mit der Maßbestimmung:

$$(23) \quad dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - dX_4^2$$

und in dieser die fünf Punkte  $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4$  mit den Koordinaten:

$$(24) \quad \begin{cases} M_0 (X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0), \\ M_i (X_1 = a_{1i}, X_2 = a_{2i}, X_3 = a_{3i}, X_4 = a_{4i}), \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

so zeigen die Ausdrücke (20) der  $A_{ij}$ , daß diese und daher auch  $\Omega$  bloß abhängen von der relativen Lage dieser fünf Punkte gegeneinander. Es ist somit  $\Omega$  invariant gegenüber den „Drehungen“ um  $M_0$  und gestattet also die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$(25) \quad \begin{cases} X_2 \frac{\partial f}{\partial X_3} - X_3 \frac{\partial f}{\partial X_2}, & X_3 \frac{\partial f}{\partial X_1} - X_1 \frac{\partial f}{\partial X_3}, & X_1 \frac{\partial f}{\partial X_2} - X_2 \frac{\partial f}{\partial X_1}, \\ X_1 \frac{\partial f}{\partial X_4} + X_4 \frac{\partial f}{\partial X_1}, & X_2 \frac{\partial f}{\partial X_4} + X_4 \frac{\partial f}{\partial X_2}, & X_3 \frac{\partial f}{\partial X_4} + X_4 \frac{\partial f}{\partial X_3}. \end{cases}$$

Aus dieser Tatsache fließen, falls:

$$(26) \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(27) \quad \bar{\Omega}_{ij} = \sum_{h=1}^4 a_{jh} \Omega_{ih}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gesetzt wird, die sechs partiellen Differentialgleichungen für  $\Omega$ :

$$(28) \quad \begin{cases} \bar{\Omega}_{23} = \bar{\Omega}_{32}, & \bar{\Omega}_{31} = \bar{\Omega}_{13}, & \bar{\Omega}_{12} = \bar{\Omega}_{21} \\ \bar{\Omega}_{14} + \bar{\Omega}_{41} = 0, & \bar{\Omega}_{24} + \bar{\Omega}_{42} = 0, & \bar{\Omega}_{34} + \bar{\Omega}_{43} = 0. \end{cases}$$

Weiter bedenke man, daß die  $e_{ij}$  und daher auch  $\Omega$  von der Wahl des Zeitparameters völlig unabhängig sind. Führt man aber  $\tau'$  an Stelle von  $\tau$  ein:

$$(29) \quad \begin{cases} \tau = \tau' + \lambda(\xi, \eta, \zeta, \tau'), \\ d\tau = d\tau' + \lambda_1 d\xi + \lambda_2 d\eta + \lambda_3 d\zeta + \lambda_4 d\tau', \end{cases}$$

so erfahren die  $a_{ij}$  die Transformation:

$$(30) \quad a'_{ij} = a_{ij} + \lambda_j a_{i4}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

der gegenüber also  $\Omega$  invariant sein muß.

Aus dieser Tatsache fließen, falls die  $\lambda_j$  unendlich klein gewählt werden, die vier partiellen Differentialgleichungen für  $\Omega$ :

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i^4 a_{i4} \Omega_{i1} = 0, \quad \sum_i^4 a_{i4} \Omega_{i2} = 0, \quad \sum_i^4 a_{i4} \Omega_{i3} = 0, \\ \sum_i^4 a_{i4} \Omega_{i4} = 0, \end{array} \right.$$

oder auch vermöge (27):

$$(31') \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i1} = 0, \quad \sum_i^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i2} = 0, \quad \sum_i^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i3} = 0, \\ \sum_i^4 a_{i4} \bar{\Omega}_{i4} = 0. \end{array} \right.$$

Umgekehrt aber bilden (28) und (31) wegen der Gruppeneigenschaft der Transformationen ein vollständiges System von partiellen Differentialgleichungen mit den sechs unabhängigen Lösungen  $e_{ij}$ , so daß man in ihnen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß:

$$(32) \quad \Omega(a_{ij}) = \Omega(e_{ij})$$

ist, vor sich hat.

#### § 4. Eine allgemeine Transformationsformel.

Stehen die vier Funktionen  $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) mit den vier Funktionen  $\varphi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ , ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) in der Beziehung:

$$(33) \quad D f_i = \sum_j^4 a_{ij} \varphi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

so gilt die Identität:

$$(34) \quad D \sum_i^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_j^4 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_j}.$$

Zum Beweise fasse man die Gleichungen (4) auf als Transformation der Punkte  $(\xi_i)$  eines Euklidischen  $R_4$  in die Punkte  $(x_i)$ .

Wird dabei ein Flächenelement  $d\omega$  mit den Projektionen  $d\omega_j$  auf die vier Koordinatenebenen und ein von ihm ausgehendes Linienelement  $d\sigma$  mit den Projektionen  $d\xi_j$  auf die vier Koordinatenachsen übergeführt in ein Flächenelement  $d\sigma$

mit den Projektionen  $do_i$  und ein von ihm ausgehendes Linien-  
element  $ds$  mit den Projektionen  $dx_i$ , so ist

$$(36) \quad \sum_1^4 do_i dx_i = D \sum_1^4 d\omega_j d\xi_j,$$

denn die Summen stellen das vierfache Volumen des unendlich kleinen Kegels mit  $do$  bzw.  $d\omega$  als Grundfläche und dem Endpunkte von  $ds$  bzw.  $d\sigma$  als Spitze dar.

Da sich nun nach (6) die  $D d\xi_j$  in die  $dx_i$  genau so transformieren, wie nach (33) die  $\varphi_j$  in die  $f_i$ , so muß auch sein:

$$(37) \quad \sum_1^4 f_i do_i = \sum_1^4 \varphi_j d\omega_j.$$

Integriert man hier über eine geschlossene Fläche und verwandelt gleich das Oberflächenintegral in ein über das Innere der Fläche erstrecktes Volumintegral, so folgt:

$$(38) \quad \int \sum_1^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \sum_1^4 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_j} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

und hieraus durch Zusammenziehen der Fläche auf einen Punkt die zu beweisende Beziehung (34).

Als spezielle Folgerung aus (34) sei insbesondere die für:

$$(39) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = 0, & \varphi_3 = 0, & \varphi_4 = Df, \\ f_1 = a_{14}f, & f_2 = a_{24}f, & f_3 = a_{34}f, & f_4 = a_{44}f \end{cases}$$

sich ergebende Beziehung:

$$(40) \quad \frac{1}{D} \frac{\partial(Df)}{\partial t} = \frac{\partial(a_{14}f)}{\partial x} + \frac{\partial(a_{24}f)}{\partial y} + \frac{\partial(a_{34}f)}{\partial z} + \frac{\partial(a_{44}f)}{\partial t}$$

angemerkt. Aus ihr ergeben sich in leicht ersichtlicher Weise für die beiden Differentiationssymbole:

$$(41) \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$(42) \quad D_t f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} + \frac{\partial(wf)}{\partial z}$$

die Darstellungen:

$$(41') \quad \frac{df}{dt} = \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial f}{\partial \tau},$$

$$(42') \quad D_t f = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{Df}{a_{44}} \right).$$

## § 5. Das kinetische Potential.

Zur Dynamik des Körpers übergehend, sei vorab noch mit:

$$(4') \quad \epsilon = \epsilon(\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

die pro Einheit des Normalvolumens berechnete Entropie desselben bezeichnet und bemerkt, daß diese allen Lorentztransformationen, also insbesondere auch der Ruhtransformation gegenüber invariant<sup>1)</sup> ist.

Nunmehr soll für den Körper die Existenz eines kinetischen Potentials der Form:

$$(43) \quad \int \Phi d\xi d\eta d\zeta d\tau$$

vorausgesetzt werden. Dieses Potential soll erstens für den Fall der Ruhe die Form:

$$(43') \quad \int \Omega(e_{ij}, \epsilon) d\xi d\eta d\zeta dt$$

eines gewöhnlichen, von den Deformationsgrößen  $e_{ij}$  und der Entropie  $\epsilon$  abhängenden kinetischen Potentials annehmen, d. h. also, es soll

$$(44) \quad \Phi = \Omega(e_{ij}, \epsilon) a_{44}$$

für den Fall der Ruhe sein.

Es soll dieses Potential zweitens den Lorentztransformationen gegenüber invariant sein, d. h. also, es soll  $\Phi$  die gleiche Invarianz aufweisen.

Aus dieser Annahme folgt, daß der allgemeine Ausdruck von  $\Phi$  erhalten wird, wenn man (44) der zur Ruhtransformation inversen Transformation unterwirft. Dies aber geschieht einfach dadurch, daß man unter den  $e_{ij}$  die Ruhdeformationen (16) versteht und  $a_{44}$  durch seinen Ruhwert  $a_{44}^0$  aus (13) ersetzt. Sonach wird allgemein sein:

$$(45) \quad \Phi(a_{ij}, \epsilon) = \Omega(e_{ij}, \epsilon) a_{44}^0 = \Omega(e_{ij}, \epsilon) \sqrt{-A_{44}}.$$

Die Temperatur  $\vartheta$  ist gemäß ihres Zusammenhangs mit dem kinetischen Potential im Falle der Ruhe:

$$(46) \quad \vartheta = - \frac{\partial \Omega}{\partial \epsilon}$$

1) M. Planck, Berl. Ber. 1907. p. 542.

und da für sie die Ruhtransformation lautet<sup>1)</sup>:

$$(47) \quad \vartheta_0 = \beta \vartheta = \frac{a_{44}}{\sqrt{-A_{44}}} \vartheta,$$

wird sie allgemein durch:

$$(48) \quad a_{44} \vartheta = - \frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

gegeben.

Die pro Einheit der Zeit und des Normalvolumens zugeführte Wärme ist dann durch:

$$(49) \quad \vartheta \frac{ds}{dt} = \frac{1}{a_{44}} \vartheta \frac{\partial s}{\partial \tau} = - \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

dargestellt.

Für die Differentialquotienten von  $\Omega$  nach  $a_{ij}$ :

$$(26) \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

bzw. für die aus ihnen abgeleiteten Größen:

$$(27) \quad \bar{\Omega}_{ij} = \sum_k^4 a_{jk} \Omega_{ik}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gelten gerade die in § 3 abgeleiteten zehn Relationen (28) und (31'). Durch diese  $\Omega_{ij}$  drücken sich dann die Differentialquotienten von  $\Phi(a_{ij}, s)$  nach  $a_{ij}$ :

$$(50) \quad \Phi_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

in der Form aus:

$$(51) \quad \Phi_{ij} = \sqrt{-A_{44}} \Omega_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{A_{44}} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

## § 6. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

Für die Bewegung des Körpers soll jetzt gelten:

$$(52) \quad \begin{cases} 0 = \delta \int \Phi d\xi d\eta d\zeta d\tau \\ \quad + \int (\Xi \delta x + H \delta y + Z \delta z + T \delta t + E \delta s) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \end{cases}$$

1) M. Planck, l. c.



Die Integration nach  $\xi, \eta, \zeta$  soll sich über den ganzen endlich gedachten Körper, die nach  $\tau$  aber von  $\tau_1$  bis  $\tau_2$  erstrecken. Geometrisch ausgedrückt sollen, falls:

$$(53) \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

die Oberfläche des Körpers darstellt, die Integrale im  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ -Raume über das durch die beiden Ebenen  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$  aus dem Zylinder (53) herausgeschnittene Volumen genommen werden. Die  $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t, \delta s$  sollen irgendwelche Variationen der fünf Funktionen  $x, y, z, t, s$  der unabhängig Veränderlichen  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  bedeuten, von denen nur  $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$  für  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$ , d. h. also an den beiden Grundflächen des Zylinders verschwinden, im übrigen ebenso wie  $\delta s$  willkürlich wählbar sein sollen.

Die Größen

$$\frac{1}{a_{44}}, \quad \frac{1}{a_{44}} H, \quad \frac{1}{a_{44}} Z$$

stellen die an der Einheit des Normalvolumens angreifenden äußeren Kräfte dar, während sich die Bedeutung von  $T$  und  $E$  im weiteren Verlaufe aus (52) selbst ergibt.

Hieraus folgen nach den Regeln der Variationsrechnung erstens für jeden Punkt des Körpers die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Xi = \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{14}}{\partial \tau}, \\ H = \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{24}}{\partial \tau}, \\ Z = \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{33}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{34}}{\partial \tau}, \\ T = \frac{\partial \Phi_{41}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi_{42}}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi_{43}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi_{44}}{\partial \tau}, \\ E = - \frac{\partial \Phi}{\partial s}. \end{array} \right.$$

Diese fünf Gleichungen sind aber — der Willkürlichkeit des Zeitparameters  $\tau$  entsprechend — voneinander abhängig. Setzt man nämlich in (52):

$$(55) \quad \delta x_i = a_{i4} \omega, \quad \delta s = \frac{\partial s}{\partial \tau} \omega,$$

wo  $\omega = \omega(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  für  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$  verschwinden, sonst beliebig sein soll, so ist:

$$(56) \quad \delta a_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_j} \omega = \frac{\partial a_{ij}}{\partial \tau} \omega + \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j} a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(57) \quad \delta \Phi = \sum_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \omega + \sum_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_j} a_{ij}.$$

Hier stellt das zweite Glied die Änderung von  $\Phi$  bei der Transformation (30) für die differentiellen Werte  $\lambda_j = \partial \omega / \partial \xi_j$  dar. Nach (45) geht bei dieser Transformation allgemein  $\Phi$  über in:

$$(58) \quad \Phi(a'_{ij}, \varepsilon) = (1 + \lambda_4) \Phi(a_{ij}, \varepsilon),$$

so daß jene Änderung gleich  $\lambda_4 \Phi = \Phi(\partial \omega / \partial \tau)$  und damit:

$$(57') \quad \delta \Phi = \frac{\partial \Phi \omega}{\partial \tau}$$

wird.

Da nun  $\omega$  für  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$  verschwinden soll, fällt in (52) das erste Glied weg und es resultiert so die gewünschte Beziehung:

$$(59) \quad a_{14} \Xi + a_{24} H + a_{34} Z + a_{44} T + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E = 0.$$

Da nach (48):

$$(60) \quad E = - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = a_{44} \vartheta$$

ist, so wird:

$$(61) \quad -T = u \Xi + v H + w Z + \vartheta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}$$

und es stellt sonach  $-T/a_{44}$  die Summe der pro Einheit der Zeit und des Normalvolumens geleisteten Arbeit und zugeführten Wärme dar.

Die Regeln der Variationsrechnung ergeben zweitens die Grenzglieder der rechten Seite von (52) zu:

$$(62) \quad \int \sum_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \delta x_i d\omega_j,$$

wobei das Integral über die gesamte Begrenzungsfläche des Integrationsgebietes im  $(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ -Raume zu erstrecken ist, und die  $d\omega_j$  die Projektionen eines Elementes  $d\omega$  dieser Fläche bezeichnen. Nun ist an den beiden Grundflächen des Zylinders  $\delta x_i = 0$ , während für die Elemente des Mantels:

$$(63) \quad d\omega_1 : d\omega_2 : d\omega_3 : d\omega_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

gilt, wofern:

$$(64) \quad d\varphi = \varphi_1 d\xi + \varphi_2 d\eta + \varphi_3 d\zeta + \varphi_4 d\tau, \quad \varphi_4 = 0$$

gesetzt wird.

Das Nullsetzen der Grenzglieber liefert daher die an der Oberfläche des Körpers geltenden Grenzbedingungen:

$$(65) \quad \varphi_1 \Phi_{i1} + \varphi_2 \Phi_{i2} + \varphi_3 \Phi_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Da nun vorhin bei der speziellen Variation (55) die Grenzglieber in Wegfall kamen, muß längs des Zylindermantels:

$$(66) \quad \sum_{i,j} a_{ij} \varphi_j \Phi_{ij} = 0$$

sein, und es ist daher wegen  $a_{44} \neq 0$  die vierte der Gleichungen (65) eine Folge der übrigen und kann demnach weggelassen werden.

#### § 7. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen und die Relationen zwischen Impuls, Energie und Spannung.

Die Eulersche Form der Bewegungsgleichungen zu erhalten, hat man nur in jeder der Gleichungen (54) nach dem Satze von § 4 an Stelle der Differentialquotienten nach  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  solche nach  $x, y, z, t$  einzuführen.

Es ergeben sich so unmittelbar, wenn

$$(67) \quad DX = \Xi, \quad DY = H, \quad DZ = Z, \quad DT = T,$$

$$(68) \quad DF_{ij} = \sum_{k=1}^4 a_{jk} \Phi_{ik}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(69) \quad F = -\frac{\Omega}{A} = -\frac{\Phi}{D}$$

gesetzt wird, die Eulerschen Bewegungsgleichungen:

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\partial F_{11}}{\partial x} + \frac{\partial F_{12}}{\partial y} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z} + \frac{\partial F_{14}}{\partial t}, \\ Y = \frac{\partial F_{21}}{\partial x} + \frac{\partial F_{22}}{\partial y} + \frac{\partial F_{23}}{\partial z} + \frac{\partial F_{24}}{\partial t}, \\ Z = \frac{\partial F_{31}}{\partial x} + \frac{\partial F_{32}}{\partial y} + \frac{\partial F_{33}}{\partial z} + \frac{\partial F_{34}}{\partial t}, \\ T = \frac{\partial F_{41}}{\partial x} + \frac{\partial F_{42}}{\partial y} + \frac{\partial F_{43}}{\partial z} + \frac{\partial F_{44}}{\partial t}, \\ \vartheta = A\sqrt{1-s^2} \frac{\partial F}{\partial s}. \end{array} \right.$$

Hier sind  $X, Y, Z$  die an der Einheit des tatsächlichen Volumens angreifenden äußeren Kräfte, und da nach (61):

$$(71) \quad -T = uX + vY + wZ + Q,$$

$$(72) \quad Q = \frac{\partial}{\partial \sqrt{1-s^2}} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s} \frac{ds}{dt}$$

ist, so stellt  $-T$  die pro Einheit der Zeit und des tatsächlichen Volumens geleistete Arbeit und zugeführte Wärme dar.

Für die  $F_{ij}$  erhält man nach (27) und (51) weiter:

$$(73) \quad \Delta F_{ij} = \bar{\Omega}_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{A_{44}} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{44}} a_{j4}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

und die Beziehungen (28) und (31') zwischen den  $\bar{\Omega}_{ij}$  ergeben für die  $F_{ij}$  die 10 Relationen:

$$(74) \quad \begin{cases} F_{23} = F_{32}, & F_{31} = F_{13}, & F_{12} = F_{21}, \\ F_{14} + F_{41} = 0, & F_{24} + F_{42} = 0, & F_{34} + F_{43} = 0. \end{cases}$$

$$(75) \quad \sum_{i=1}^4 a_{i4} F_{ij} + a_{j4} F = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Aus der Form<sup>1)</sup> der Gleichungen (70) entnimmt man, daß die  $F_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) die Spannungen darstellen, und daß Impuls  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  und Energie  $\mathfrak{E}$  pro Einheit des tatsächlichen Volumens berechnet durch:

$$(76) \quad \mathfrak{X} = F_{14}, \quad \mathfrak{Y} = F_{24}, \quad \mathfrak{Z} = F_{34}, \quad \mathfrak{E} = -F_{44}$$

gegeben sind, so daß man insbesondere in der vierten dieser Gleichungen:

$$(70') \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = uX + vY + wZ + Q$$

die Energiegleichung vor sich hat.

Impuls, Energie und Spannungen sind nach (75) miteinander verknüpft durch die Relationen:

$$(77) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = uF + uF_{11} + vF_{21} + wF_{31} \\ \mathfrak{Y} = vF + uF_{12} + vF_{22} + wF_{32} \\ \mathfrak{Z} = wF + uF_{13} + vF_{23} + wF_{33} \\ \mathfrak{E} = F + u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z}. \end{cases}$$

1) M. Abraham, Rendiconti del. circ. mat. d. Palermo 28. p.1. 1909.

Pro Einheit des Normalvolumens berechnet sind Impuls und Energie:

$$(78) \quad \bar{x} = \frac{D}{a_{44}} \bar{x}, \quad \bar{y} = \frac{D}{a_{44}} \bar{y}, \quad \bar{z} = \frac{D}{a_{44}} \bar{z}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{D}{a_{44}} \bar{\epsilon}$$

oder bei Beachtung des Zusammenhanges zwischen den  $F_{ij}$  und  $\Phi_{ij}$ :

$$(78') \quad \left\{ \begin{aligned} a_{44} \bar{x} &= \sum_i^4 a_{4i} \Phi_{1i}, & a_{44} \bar{y} &= \sum_i^4 a_{4i} \Phi_{2i}, & a_{44} \bar{z} &= \sum_i^4 a_{4i} \Phi_{3i}, \\ & - a_{44} \bar{\epsilon} &= \sum_i^4 a_{4i} \Phi_{4i} \end{aligned} \right.$$

und speziell, falls  $t = \tau$  gewählt wird:

$$(78'') \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \Phi_{14} = \Phi_u, & \bar{y} &= \Phi_{24} = \Phi_v, & \bar{z} &= \Phi_{34} = \Phi_w, \\ \bar{\epsilon} &= -\Phi_{44} = u \Phi_u + v \Phi_v + w \Phi_w - \Phi. \end{aligned} \right.$$

Um schließlich auch die Grenzbedingungen (65) durch die  $F_{ij}$  auszudrücken, schreibe man sie erst symmetrischer:

$$(65) \quad \varphi_1 \Phi_{i1} + \varphi_2 \Phi_{i2} + \varphi_3 \Phi_{i3} + \varphi_4 \Phi_{i4} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

und es sei auf  $x, y, z, t$  umgerechnet:

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, \zeta) &= f(x, y, z, t), \\ df &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz + f_4 dt. \end{aligned} \right.$$

Bemerkt man dann, daß die Transformation, welche  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  in  $f_1, f_2, f_3, f_4$  überführt — vom Faktor  $D$  abgesehen — gerade kontragredient zu derjenigen ist, welche  $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{13}, \Phi_{14}$  in  $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}$  überführt, so erhellt, daß die Grenzbedingungen in den  $F_{ij}$  ausgedrückt lauten:

$$(80) \quad f_1 F_{i1} + f_2 F_{i2} + f_3 F_{i3} + f_4 F_{i4} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sind noch  $n_1, n_2, n_3$  die Richtungskosinusse der Normalen der Oberfläche des Körpers und  $s_n$  die Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens in derselben nach dieser Normalen, so ist:

$$(81) \quad f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = n_1 : n_2 : n_3 : -s_n.$$

Daher man statt (80) auch schreiben kann:

$$(80') \quad n_1 F_{i1} + n_2 F_{i2} + n_3 F_{i3} = s_n F_{i4}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Bei einer jeden Lorentztransformation der  $x_j$  transformieren sich die  $F_{ij}$  genau wie die Produkte  $u_i x_j$  der  $x_j$  in die zu ihnen kontragredienten  $u_i$ .

Die „Ruhwerte“  $F_{ij}^0$  der  $F_{ij}$  ergeben sich aus dem bisherigen für  $u = v = w = 0$ , wo dann:  $a_{ij} = a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) wird zu:

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta F_{ij}^0 = \sum_{h=1}^3 a_{jh}^0 \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ih}^0}, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ F_{i4}^0 = F_{4i}^0 = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ F_{44}^0 = \frac{\Omega}{\Delta} = -F = -\mathfrak{E}^0. \end{array} \right.$$

Aus ihnen lassen sich die  $F_{ij}$  durch die zur Ruhtransformation inverse Transformation ableiten.

#### § 8. Eine dritte Form der Bewegungsgleichungen und die relativen Spannungen.

Führt man in (70) an Stelle der Differentialquotienten  $\partial/\partial t$  die Differentiationssymbole  $D_i$  (vgl. § 4) ein, so erhält man die dritte Form der Bewegungsgleichungen:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = D_i \mathfrak{X} + \frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \frac{\partial S_{13}}{\partial z}, \\ Y = D_i \mathfrak{Y} + \frac{\partial S_{21}}{\partial x} + \frac{\partial S_{22}}{\partial y} + \frac{\partial S_{23}}{\partial z}, \\ Z = D_i \mathfrak{Z} + \frac{\partial S_{31}}{\partial x} + \frac{\partial S_{32}}{\partial y} + \frac{\partial S_{33}}{\partial z}, \\ -T = D_i \mathfrak{E} + \frac{\partial (\mathfrak{X} - u \mathfrak{E})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{Y} - v \mathfrak{E})}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{Z} - w \mathfrak{E})}{\partial z}, \end{array} \right.$$

wobei die hier auftretenden „relativen“<sup>1)</sup> Spannungen  $S_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$(84) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{11} = F_{11} - u \mathfrak{X}, \quad S_{12} = F_{12} - v \mathfrak{X}, \quad S_{13} = F_{13} - w \mathfrak{X}, \\ S_{21} = F_{21} - u \mathfrak{Y}, \quad S_{22} = F_{22} - v \mathfrak{Y}, \quad S_{23} = F_{23} - w \mathfrak{Y}, \\ S_{31} = F_{31} - u \mathfrak{Z}, \quad S_{32} = F_{32} - v \mathfrak{Z}, \quad S_{33} = F_{33} - w \mathfrak{Z}, \end{array} \right.$$

1) M. Abraham, l. c.

mit Impuls und Energie durch:

$$(85) \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = u \mathfrak{E} + u S_{11} + v S_{21} + w S_{31} \\ \mathfrak{Y} = v \mathfrak{E} + u S_{12} + v S_{22} + w S_{32} \\ \mathfrak{Z} = w \mathfrak{E} + u S_{13} + v S_{23} + w S_{33} \end{cases}$$

verknüpft sind.

Die Grenzbedingungen (80') werden wegen:

$$(86) \quad s_n = u n_1 + v n_2 + w n_3,$$

in den  $S_{ij}$  ausgedrückt lauten:

$$(87) \quad n_1 S_{i1} + n_2 S_{i2} + n_3 S_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

und fordern also das Verschwinden der relativen Spannungen für jedes Oberflächenelement.

#### § 9. Die zehn allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen.

Der zehngliedrigen Gruppe der „Bewegungen“ im  $(x, y, z, t)$ -Raum mit der Maßbestimmung:

$$(88) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

entsprechend, gelten für den ganzen Körper 10 dem Schwerpunkt-, Flächen- und Energieprinzip der gewöhnlichen Mechanik analoge Sätze.

Werden nämlich in der Relation (52) für  $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$  die Komponenten einer unendlich kleinen derartigen Bewegung genommen und dazu:  $\delta \varepsilon = 0$  gewählt, so wird für diese Variationen  $\delta \Phi = 0$  und somit das erste Glied der rechten Seite verschwinden. Da aber diese Variationen die Bedingung für  $\tau = \tau_1$  und  $\tau = \tau_2$  zu verschwinden nicht erfüllen, wird andererseits die linke Seite jener Relation nicht Null, sondern durch das Grenzglied (62) zu ersetzen sein:

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \sum_{i,j}^4 \Phi_{ij} \delta x_i d\omega_j \\ & = \int (\Xi \delta x + H \delta y + Z \delta z + T \delta t) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \end{aligned} \right.$$

In dem Oberflächenintegral links fällt nun infolge der Grenzbedingungen (65) der vom Mantel des Zylinders herrührende Teil überhaupt fort, während für die Grundflächen  $\tau = \tau_1$  und

$\tau = \tau_2$  des Zylinders:  $d\omega_1 = d\omega_2 = d\omega_3 = 0$ ,  $d\omega_4 = d\xi d\eta d\zeta$  ist, so daß:

$$(89) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \sum_1^4 \psi_{i,4} \delta x_i d\xi d\eta d\zeta \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \\ & = \int (\Xi \delta x + H \delta y + Z \delta z + T \delta t) d\xi d\eta d\zeta d\tau. \end{aligned} \right.$$

Läßt man jetzt  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  werden, und wählt  $t = \tau$ , so folgt

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{X} \delta x + \mathfrak{Y} \delta y + \mathfrak{Z} \delta z - \mathfrak{E} \delta t) dv \\ & = \int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + T \delta t) dv, \end{aligned} \right.$$

wo  $dv = dx dy dz$  das Volumelement des Körpers bezeichnet, und die Integrale über den ganzen zur Zeit  $t$  von dem Körper eingenommenen Raum zu erstrecken sind.

Aus dieser für jede unendlich kleine Bewegung  $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$  gültigen Relation fließen den 10 unabhängigen infinitesimalen Bewegungen entsprechend die oben erwähnten Sätze, und zwar den infinitesimalen Translationen:

$$(91) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}$$

entsprechend der Impuls- und Energiesatz:

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \mathfrak{X} dv = \int X dv, \quad \frac{d}{dt} \int \mathfrak{Y} dv = \int Y dv, \\ & \frac{d}{dt} \int \mathfrak{Z} dv = \int Z dv, \quad - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{E} dv = \int T dv, \end{aligned} \right.$$

den infinitesimalen Drehungen:

$$(93) \quad y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x},$$

entsprechend der Flächensatz:

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int (y \mathfrak{Z} - z \mathfrak{Y}) dv = \int (y Z - z Y) dv, \\ & \frac{d}{dt} \int (z \mathfrak{X} - x \mathfrak{Z}) dv = \int (z X - x Z) dv, \\ & \frac{d}{dt} \int (x \mathfrak{Y} - y \mathfrak{X}) dv = \int (x Y - y X) dv \end{aligned} \right.$$

und den infinitesimalen Drehungen:

$$(95) \quad t \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial t}, \quad t \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial t}, \quad t \frac{\partial f}{\partial z} + z \frac{\partial f}{\partial t},$$



entsprechend die Sätze:

$$(96) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int (t\mathfrak{X} - x\mathfrak{E}) dv = \int (tX + xT) dv, \\ \frac{d}{dt} \int (t\mathfrak{Y}) - y\mathfrak{E}) dv = \int (tY + yT) dv, \\ \frac{d}{dt} \int (t\mathfrak{Z} - z\mathfrak{E}) dv = \int (tZ + zT) dv. \end{cases}$$

Werden von den Gleichungen (96) die mit  $t$  multiplizierten entsprechenden Gleichungen (92) subtrahiert, so erhalten sie die Form:

$$(96') \quad \begin{cases} \int \mathfrak{X} dv = \frac{d}{dt} \int x\mathfrak{E} dv + \int xT dv, \\ \int \mathfrak{Y} dv = \frac{d}{dt} \int y\mathfrak{E} dv + \int yT dv, \\ \int \mathfrak{Z} dv = \frac{d}{dt} \int z\mathfrak{E} dv + \int zT dv, \end{cases}$$

wodurch sie in eine gewisse Parallele zu den einmal integrierten Schwerpunktsätzen der gewöhnlichen Mechanik treten.

Bewegt sich der Körper insbesondere kräftefrei-adiabatisch, so sind Impuls, Impulsmoment und Energie konstant und überdies bewegt sich der Energiemittelpunkt geradlinig und gleichförmig und seine Geschwindigkeit mit der Energie multipliziert ergibt den Impuls.

#### § 10. Die hydrodynamischen Gleichungen.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen zu erhalten, hat man  $\Omega$  nur von Ruhvolumen und Entropie abhängen zu lassen:

$$(97) \quad \Omega = \Omega(A, s) = \Omega\left(\frac{D}{\sqrt{-A_{44}}}, s\right).$$

Dieser Ansatz liefert, falls

$$(98) \quad p = \frac{\partial \Omega}{\partial A}$$

gesetzt wird, nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(99) \quad \bar{\Omega}_{i,j} = pA \left( \delta_{ij} - \frac{1}{2A_{44}} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{i4}} a_{j4} \right) \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j, \quad \delta_{ii} = 1$$

und damit folgt dann:

$$(100) \quad P_{ij} = p \delta_{ij} + \frac{m}{a_{i4}^2} \frac{\partial A_{44}}{\partial a_{i4}} a_{j4} \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

$$(101) \quad m = \frac{F + p}{1 - s^2} = \frac{\Delta \Omega_A - \Omega}{\Delta(1 - s^2)} = - \frac{\Delta F_A}{1 - s^2}.$$

Es sind sonach Impuls und Energie pro Einheit des tatsächlichen Volumens

$$(102) \quad \mathfrak{X} = mu, \quad \mathfrak{Y} = mv, \quad \mathfrak{Z} = mw, \quad \mathfrak{E} = m - p$$

und die relativen Spannungen erhalten die einfachen Werte:

$$(103) \quad \begin{cases} \mathcal{S}_{11} = \mathcal{S}_{22} = \mathcal{S}_{33} = p, \\ \mathcal{S}_{23} = \mathcal{S}_{32} = \mathcal{S}_{31} = \mathcal{S}_{13} = \mathcal{S}_{12} = \mathcal{S}_{21} = 0. \end{cases}$$

Damit geht aber die dritte Form der Bewegungsgleichungen (81) über in die hydrodynamischen Grundgleichungen:

$$(104) \quad \begin{cases} D_t(mu) + \frac{\partial p}{\partial x} = X, \\ D_t(mv) + \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \\ D_t(mw) + \frac{\partial p}{\partial z} = Z, \\ -D_t(m) + \frac{\partial p}{\partial t} = T. \end{cases}$$

Pro Einheit des Normalvolumens berechnet sind Impuls und Energie:

$$(105) \quad \bar{\mathfrak{X}} = \mu u, \quad \bar{\mathfrak{Y}} = \mu v, \quad \bar{\mathfrak{Z}} = \mu w, \quad \bar{\mathfrak{E}} = \mu - p \Delta \sqrt{1 - s^2}.$$

$$(106) \quad \mu = m \Delta \sqrt{1 - s^2} = \beta (\Delta \Omega_A - \Omega).$$

Wählt man  $t = \tau$  und bedenkt, daß dann

$$(107) \quad \Phi = \Omega \left( \frac{D}{\sqrt{1 - s^2}}, \epsilon \right) \sqrt{1 - s^2}$$

wegen  $D = |a_{ij}|$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) die  $u, v, w$  bloß in der Verbindung  $s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  enthält, so lehrt (78'') daß:

$$(108) \quad \mu = \frac{1}{s} \Phi_s, \quad \mathfrak{E} = s \Phi_s - \Phi \quad \bullet$$

ist. Insbesondere zeigt der Ausdruck (105) des Impulses, daß der Flüssigkeit eine longitudinale und transversale Trägheit zukommt, welche pro Einheit des Normalvolumens durch

$$(109) \quad \mu_t = \mu = \frac{1}{s} \Phi_s, \quad \mu_i = \Phi_{ss}$$

gegeben wird, wobei man noch berechnet:

$$(110) \quad \begin{cases} \Phi_s = s \beta (\Delta \Omega_A - \Omega), \\ \Phi_{ss} = \beta^3 (\Delta \Omega_A - \Omega) + s^2 \beta^3 \Delta^2 \Omega_{AA}. \end{cases}$$

Da hier die unabhängigen Variablen  $D, \epsilon, s$  sind, hat man damit — genauer präzisiert — die adiabatisch-isochoren Werte der Trägheitskoeffizienten.

§ 11. Die Webersche Form der hydrodynamischen Gleichungen und die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegungen.

Aus den Gleichungen (104) folgt in leicht ersichtlicher Weise:

$$(111) \quad \begin{cases} D [dx D_t(mu) + dy D_t(mv) + dz D_t(mw) - dt D_t(m)] \\ = -D dp + \Xi dx + H dy + Z dz + T dt. \end{cases}$$

Setzt man jetzt:

$$(112) \quad M = \frac{m D}{a_{44}^2} = \frac{\mu}{a_{44}}$$

und verwendet für  $D_t$  die Darstellung (42), so geht die linke Seite von (111) über in:

$$(113) \quad \begin{cases} \frac{\partial M a_{44}}{\partial \tau} dx + \frac{\partial M a_{44}}{\partial \tau} dy + \frac{\partial M a_{44}}{\partial \tau} dz - \frac{\partial M a_{44}}{\partial \tau} dt \\ = \frac{\partial}{\partial \tau} (M dv) - \frac{1}{2} M dA_{44} \\ = \frac{\partial}{\partial \tau} (M dv) - d(M A_{44}) - \sqrt{-A_{44}} d(M \sqrt{-A_{44}}). \end{cases}$$

Da aber weiter

$$(114) \quad M \sqrt{-A_{44}} = \mu \sqrt{1-s^2} = \Delta \Omega_A - \Omega$$

ist, so schreibt sich (111) nach kurzer Reduktion schließlich:

$$(115) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} (M dv) = d(M A_{44}) + d\Pi, \\ d\Pi = \Xi dx + H dy + Z dz + T dt + E d\epsilon. \end{cases}$$

Ist also in  $d\xi, d\eta, d\zeta, d\tau$  ausgedrückt:

$$(116) \quad d\Pi = A d\xi + B d\eta + \Gamma d\zeta,$$

so liefert die Vergleichung der Koeffizienten von  $d\xi, d\eta, d\zeta$  in (115) die den von H. Weber gegebenen gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen analogen:

$$(117) \quad \begin{cases} \frac{\partial M A_{14}}{\partial \tau} = \frac{\partial M A_{44}}{\partial \xi} + A, \\ \frac{\partial M A_{14}}{\partial \tau} = \frac{\partial M A_{44}}{\partial \eta} + B, \\ \frac{\partial M A_{34}}{\partial \tau} = \frac{\partial M A_{44}}{\partial \zeta} + \Gamma. \end{cases}$$

Setzt man andererseits in (115)  $d\tau = 0$  und wählt  $t = \tau$ , so folgt:

$$(118) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{X} dx + \bar{Y} dy + \bar{Z} dz \\ = d\mu(s^2 - 1) + \Xi dx + H dy + Z dz + \vartheta d\varepsilon. \end{cases}$$

Im Falle also für  $dt = 0$ :

$$(119) \quad \Xi dx + H dy + Z dz + \vartheta d\varepsilon = d\omega(x, y, z, t)$$

ist, wird für jeden geschlossenen, auf Null reduzierbaren Integrationsweg:

$$(120) \quad \frac{d}{dt} \int (\bar{X} dx + \bar{Y} dy + \bar{Z} dz) = 0.$$

Oder: das über eine geschlossene, stets aus den gleichen Teilchen bestehende Kurve genommene Linienintegral des Impulses hat bei der Bewegung der Flüssigkeit einen der Zeit nach konstanten Wert.

Damit aber treten sofort die Helmholtzschen Wirbelsätze in Kraft, wofern die Wirbelgeschwindigkeit  $p, q, r$  hier durch den Curl des Impulses:

$$(121) \quad p = \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{Y}}{\partial z}, \quad q = \frac{\partial \bar{X}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x}, \quad r = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{X}}{\partial y}$$

definiert wird.

## § 12. Das kinetische Potential des isotropen elastischen Körpers für kleine Ruhedeformationen.

Handelt es sich um einen elastischen — im Normalzustand isotropen — Körper, so hat man  $\Omega$  außer von der

Entropie nur noch von den drei Hauptdilatationen, welche die Ruhgestalt eines Volumelementes seiner Normalgestalt gegenüber aufweist, abhängen zu lassen. An ihrer Stelle aber kann man die drei, aus ihnen symmetrisch zusammengesetzten Invarianten  $J_1, J_2, J_3$  der Ruhdeformation einführen, welche sich aus der Identität in  $\lambda$ :

$$(122) \quad \begin{vmatrix} e_{11} + \lambda, & e_{12}, & e_{13} \\ e_{21}, & e_{22} + \lambda, & e_{23} \\ e_{31}, & e_{32}, & e_{33} + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda + J_3$$

zu:

$$(123) \quad \begin{cases} J_1 = e_{11} + e_{22} + e_{33}, \\ J_2 = (e_{22} e_{33} - e_{23}^2) + (e_{33} e_{11} - e_{31}^2) + (e_{11} e_{22} - e_{12}^2), \\ J_3 = e_{11} e_{22} e_{33} + 2 e_{23} e_{31} e_{12} - e_{11} e_{23}^2 - e_{22} e_{31}^2 - e_{33} e_{12}^2 \\ \quad = |e_{ij}| \end{cases}$$

bestimmen, und mit  $\Delta$  durch:

$$(124) \quad \Delta^2 = 1 + 2 J_1 + 4 J_2 + 8 J_3$$

zusammenhängen. Sind insbesondere die Ruhdeformationen  $e_{ij}$  genügend klein und verschwinden die Spannungen im Normalzustand, so kann man  $\Omega$  als quadratische Funktion der  $e_{ij}$ , also in der Form:

$$(125) \quad \Omega = -M - \frac{1}{2} A J_1^2 + 2 B J_3$$

annehmen, wo  $A, B, M$  noch von  $\varepsilon$  abhängen können.

## Zweiter Teil.

### Der Trägheitswiderstand und die Wellenmechanik.

#### § 1. Die sechs Trägheitskoeffizienten und das Postulat des positiv definiten Charakters der Form $I$ .

Wählt man für das Folgende speziell  $\tau = t$ , so wird:

$$(1) \quad \Phi = \Phi(a_{ij}, u, v, w, \varepsilon) \quad i, j = 1, 2, 3$$

und der Impuls pro Einheit des Normalvolumens:

$$(2) \quad \bar{x} = \Phi_u, \quad \bar{y} = \Phi_v, \quad \bar{z} = \Phi_w.$$

Ändern sich nun bei einer Zunahme der Geschwindigkeitskomponenten  $u, v, w$  um  $\gamma_1 dt, \gamma_2 dt, \gamma_3 dt$  diese Impulskomponenten um  $\Gamma_1 dt, \Gamma_2 dt, \Gamma_3 dt$ , so mögen  $-\Gamma_1, -\Gamma_2, -\Gamma_3$

die pro Einheit des Normalvolumens berechneten Komponenten des durch die Beschleunigung:

$$(3) \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

geweckten Trägheitswiderstandes heißen.

Offenbar ist nach (2), falls:

$$(4) \quad \begin{cases} \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \sum_{i,j}^3 \mu_{ij} \gamma_i \gamma_j \\ = \delta^2 \Phi \text{ für } \delta u = \gamma_1, \delta v = \gamma_2, \delta w = \gamma_3 \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$(5) \quad \begin{cases} \Gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_1} = \mu_{11} \gamma_1 + \mu_{12} \gamma_2 + \mu_{13} \gamma_3, \\ \Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_2} = \mu_{21} \gamma_1 + \mu_{22} \gamma_2 + \mu_{23} \gamma_3, \\ \Gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma_3} = \mu_{31} \gamma_1 + \mu_{32} \gamma_2 + \mu_{33} \gamma_3, \\ \mu_{ij} = \mu_{ji}. \end{cases}$$

Die „Trägheitskoeffizienten“  $\mu_{ij}$  repräsentieren die pro Einheit des Normalvolumens berechneten Massen oder Dichten des Körpers.<sup>1)</sup> Es sind — da  $a_{ij}$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\varepsilon$  die unabhängigen Variablen sind — genauer präzisiert die adiabatisch-isochoren Trägheitskoeffizienten.

Hiernach gibt es stets drei zueinander normale Richtungen der Beschleunigung — die „Hauptträgheitsrichtungen“ —, für welche der Trägheitswiderstand mit der Beschleunigung gleiche oder entgegengesetzte Richtung besitzt. Es sind die Hauptachsen der Fläche zweiten Grades:  $\Gamma(x, y, z) = C$ .

Nimmt man die Komponenten von Beschleunigung und Trägheitswiderstand nach diesen drei Hauptträgheitsrichtungen, so wird:

$$(4') \quad \Gamma = \mu_1 \gamma_1^2 + \mu_2 \gamma_2^2 + \mu_3 \gamma_3^2,$$

$$(5') \quad \Gamma_1 = \mu_1 \gamma_1, \quad \Gamma_2 = \mu_2 \gamma_2, \quad \Gamma_3 = \mu_3 \gamma_3.$$

1) Allgemein sind die Gleichungen I. (54) linear in den zweiten Ableitungen der Funktionen  $x, y, z, t$  nach  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Wählt man nun speziell:  $t = \tau$ , so sind die  $\mu_{ij}$  die Koeffizienten, mit denen multipliziert die drei Ableitungen zweiter Ordnung von  $x, y, z$  nach  $t$ , also die Beschleunigungen in den ersten drei der Gleichungen I. (54) auftreten.

Schließt man daher die Möglichkeit, daß eine Beschleunigung einen ihr gleich gerichteten Trägheitswiderstand weckt, aus, so sind die drei Hauptträgheitskoeffizienten  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  positiv und also die quadratische Form  $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  definit positiv.

Wegen:

$$(6) \quad \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \gamma_3 I_3$$

kann man diese Annahme auch dahin aussprechen: es soll der Trägheitswiderstand stets einen stumpfen Winkel mit der Beschleunigung bilden.

Ist die Richtung der Geschwindigkeit und jede zu ihr normale eine Hauptträgheitsrichtung, so erhält man den wohlbekannten Fall rein longitudinaler und transversaler Trägheitskoeffizienten  $\mu_l$  und  $\mu_t$ . Dann wird

$$(4'') \quad \Gamma = \mu_l \gamma_l^2 + \mu_t \gamma_t^2,$$

falls:

$$(7) \quad \gamma_t = \frac{1}{s}(u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3), \quad \gamma_l = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_t^2}$$

die longitudinale und transversale Komponente der Beschleunigung — d. i. parallel und normal zur Geschwindigkeit — bezeichnen.

Für ein ruhendes Element sind die Trägheitskoeffizienten  $\mu_i^0$  sofort anzugeben. Aus I. (77) folgt unmittelbar:

$$(8) \quad \begin{cases} \mu_{ij}^0 = \Delta F_{ij}^0, & i \neq j, \\ \mu_{ii}^0 = \bar{\mathbb{G}}^0 + \Delta F_{ii}^0, \end{cases}$$

also:

$$(9) \quad I_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \bar{\mathbb{G}}^0(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \Delta \sum_{i,j} F_{ij}^0 \gamma_i \gamma_j.$$

Die Hauptträgheitsrichtungen sind für ein ruhendes Element sonach einfach die Hauptspannungsrichtungen.

Für den Fall rein longitudinaler und transversaler Masse muß offenbar

$$(10) \quad F_{ij}^0 = 0, \quad i \neq j, \quad F_{ii}^0 = p,$$

also:

$$(11) \quad \mu_l^0 = \mu_t^0 = \bar{\mathbb{G}}^0 + p \Delta$$

sein.

§ 2. Erste Darstellung der Form  $I$ .

Die Trägheitskoeffizienten für ein bewegtes Element zu berechnen, hat man jetzt nur die Form  $I(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , also die zweite Variation  $\delta^2 \Phi$  von:

$$(12) \quad \Phi = \Omega(e_{ij}, \delta) \sqrt{1-s^2}$$

für

$$(13) \quad \delta u = \gamma_1, \quad \delta v = \gamma_2, \quad \delta w = \gamma_3$$

zu bilden. Man hat zunächst:

$$(14) \quad \delta^2 \Phi = \sqrt{1-s^2} \delta^2 \Omega + 2 \delta \Omega \delta \sqrt{1-s^2} + \Omega \delta^2 \sqrt{1-s^2},$$

$$(15) \quad \begin{cases} \delta \Omega = \sum_{i,j}^8 \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij}, \\ \delta^2 \Omega = \sum_{i,j,h,k}^8 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \delta e_{ij} \delta e_{hk} + \sum_{i,j}^8 \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta^2 e_{ij}. \end{cases}$$

Zur Bildung der  $\delta e_{ij}$ ,  $\delta^2 e_{ij}$  gehe man nun davon aus, daß  $dt = d\tau = 0$  genommen:

$$(16) \quad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(u dx + v dy + w dz)^2}{1-s^2}$$

in  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$  ausgedrückt lautet:

$$(16') \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2 d\epsilon^2,$$

$$(17) \quad d\epsilon^2 = \sum_{i,j}^8 e_{ij} d\xi_i d\xi_j.$$

Läßt man also in  $d\sigma^2$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  übergehen in  $u + \gamma_1$ ,  $v + \gamma_2$ ,  $w + \gamma_3$  und entwickelt nach Potenzen der  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , so wird aus  $d\sigma^2$  werden:

$$(18) \quad d\sigma^{*2} = d\sigma^2 + 2 \delta d\epsilon^2 + \delta^2 d\epsilon^2 + \dots$$

$$(19) \quad \begin{cases} \delta d\epsilon^2 = \sum_{i,j}^8 \delta e_{ij} d\xi_i d\xi_j, \\ \delta^2 d\epsilon^2 = \sum_{i,j}^8 \delta^2 e_{ij} d\xi_i d\xi_j. \end{cases}$$

Die aus (16) direkt herzustellende Entwicklung von  $d\sigma^{*2}$  nach den  $\gamma_i$  wird sonach durch ihre linearen Glieder die  $\delta e_{ij}$ , durch ihre quadratischen Glieder aber die  $\delta^2 e_{ij}$  liefern.



Jene Entwicklung selbst kurz auszuführen, bemerke man erst, daß die aus  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  durch die Ruhstransformation hervorgehenden Komponenten der „Ruhbeschleunigung“:

$$(20) \quad \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, \gamma^0 = \sqrt{\gamma_1^{0^2} + \gamma_2^{0^2} + \gamma_3^{0^2}}$$

sind:

$$(21) \quad \begin{cases} \beta^{-2} \gamma_1^0 = \gamma_1 + \alpha u (u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3), \\ \beta^{-2} \gamma_2^0 = \gamma_2 + \alpha v (u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3), \\ \beta^{-2} \gamma_3^0 = \gamma_3 + \alpha w (u \gamma_1 + v \gamma_2 + w \gamma_3) \end{cases}$$

und speziell für die longitudinalen und transversalen Komponenten gilt:

$$(22) \quad \gamma_i^0 = \beta^3 \gamma_i, \quad \gamma_i^0 = \beta^2 \gamma_i.$$

Zweitens setze man:

$$(23) \quad \begin{cases} dv = u dx + v dy + w dz, \\ dv^0 = u dx^0 + v dy^0 + w dz^0, \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} d\gamma = \gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz, \\ d\gamma^0 = \gamma_1^0 dx^0 + \gamma_2^0 dy^0 + \gamma_3^0 dz^0 \end{cases}$$

und stelle auf Grund der Gleichungen, welche für  $dt = 0$  die  $dx, dy, dz$  mit den  $dx^0, dy^0, dz^0$  (I. § 1) verknüpfen, fest, daß:

$$(25) \quad \begin{cases} dv = \beta^{-1} dv^0 \\ d\gamma = \beta^{-2} (d\gamma^0 - s \gamma_i^0 dv^0) \end{cases}$$

ist. Dies vorweg genommen, wird jetzt ohne weiteres:

$$(26) \quad \begin{cases} d\sigma^{*2} = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(dv + d\gamma)^2}{1 - s^2 - 2s\gamma_i - \gamma^2} \\ = d\sigma^2 + \frac{2}{\beta} dv^0 d\gamma^0 \\ + \frac{1}{\beta^2} [d\gamma^{0^2} + 2s\gamma_i^0 dv^0 d\gamma^0 + \gamma^{0^2} dv^{0^2}] + \dots, \end{cases}$$

also:

$$(27) \quad \begin{cases} \delta d\epsilon^2 = \frac{1}{\beta} dv^0 d\gamma^0, \\ \delta^2 d\epsilon^2 = \frac{1}{\beta^2} [d\gamma^{0^2} + 2s\gamma_i^0 dv^0 d\gamma^0 + \gamma^{0^2} dv^{0^2}], \end{cases}$$

und endlich findet man noch:

$$(28) \quad \begin{cases} \delta \sqrt{1 - s^2} = -\beta s \gamma_i = -\beta^{-2} s \gamma_i^0, \\ \delta^2 \sqrt{1 - s^2} = -\beta \gamma^2 - \beta^3 s^2 \gamma_i^2 = -\beta^{-3} \gamma^{0^2}. \end{cases}$$

Alles in (14) eingesetzt, ergibt schließlich als Endresultat:

$$(29) \quad \beta^3 I = \sum_1^3 {}^{ijhk} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} + \sum_1^3 {}^{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \varepsilon_{ij}^* - \Omega \gamma^0{}^3,$$

worin die  $\varepsilon_{ij}$  und  $\varepsilon_{ij}^*$  durch:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv^0 d\gamma^0 = \sum_1^3 {}^{ij} \varepsilon_{ij} d\xi_i d\xi_j \\ d\gamma^0{}^3 + \gamma^0{}^3 dv^0{}^2 = \sum_1^3 {}^{ij} \varepsilon_{ij}^* d\xi_i d\xi_j \end{array} \right.$$

definiert sind.

Setzt man daher:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} dv^0 = \alpha_1 d\xi + \alpha_2 d\eta + \alpha_3 d\zeta, \\ d\gamma^0 = \pi_1 d\xi + \pi_2 d\eta + \pi_3 d\zeta, \end{array} \right.$$

wobei offenbar:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = a_{1i}^0 u + a_{2i}^0 v + a_{3i}^0 w, \\ \pi_i = a_{1i}^0 \gamma_1^0 + a_{2i}^0 \gamma_2^0 + a_{3i}^0 \gamma_3^0, \end{array} \right.$$

ist, so wird

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\pi_i \alpha_j + \pi_j \alpha_i), \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \varepsilon_{ij}^* = \pi_i \pi_j + \gamma^0{}^3 \alpha_i \alpha_j. \end{array} \right.$$

Hiernach hat  $I$  die Gestalt:

$$(34) \quad \beta^3 I = P(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, u, v, w) + Q(\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0),$$

wo

$$(35) \quad P = \sum_1^3 {}^{ijhk} \frac{\partial^3 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} + \gamma^0{}^2 \sum_1^3 {}^{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \alpha_i \alpha_j$$

eine quadratische Form in  $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$  sowohl, wie in  $u, v, w$  ist, während

$$(36) \quad Q = \sum_1^3 {}^{ij} \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \pi_i \pi_j - \Omega \gamma^0{}^3$$

eine quadratische Form in  $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$  allein wird. Die Koeffizienten beider Formen sind nur noch von den  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) und  $\varepsilon$  abhängig.

Für ein ruhendes Element  $u = v = w = 0$  wird:

$$(37) \quad I_0 = Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

und der Vergleich mit (9) lehrt, daß allgemein:

$$(38) \quad Q = \overline{Q}^0 \gamma^{0^2} + \Delta \sum_{i,j}^3 F_{ij}^0 \gamma_i^0 \gamma_j^0$$

ist.

§ 3. Zweite Darstellung der Form  $I$  und der Charakter der Formen  $P$  und  $Q$ .

Die in § 1 gemachte Annahme bezüglich des Trägheitswiderstandes ergibt:

$$(39) \quad \begin{cases} P + Q \geq 0 \text{ für alle } \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0 \text{ und } u^2 + v^2 + w^2 < 1, \\ Q \geq 0 \text{ für alle } \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0. \end{cases}$$

Über den Charakter der Form  $P$  allein gibt eine zweite Darstellung von  $P$  und  $Q$  Aufschluß, bei der  $\Omega$  vermöge I (16) als Funktion der  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) und  $s$  gedacht wird.

Es ist nämlich auch nach Gl. II. (14):

$$(40) \quad d\sigma^2 = dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2}$$

und wenn daher — unter  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) beliebige Zahlen verstanden, und

$$(41) \quad \begin{cases} d\alpha^0 = \alpha_1 dx^0 + \alpha_2 dy^0 + \alpha_3 dz^0, \\ d\beta^0 = \beta_1 dx^0 + \beta_2 dy^0 + \beta_3 dz^0 \end{cases}$$

gesetzt — den  $a_{ij}^0$  die Variationen:

$$(42) \quad \delta a_{ij}^0 = \alpha_i (a_{1j}^0 \beta_1 + a_{2j}^0 \beta_2 + a_{3j}^0 \beta_3)$$

erteilt werden, wodurch gleichzeitig:

$$(43) \quad \delta dx^0 = \alpha_1 d\beta^0, \quad \delta dy^0 = \alpha_2 d\beta^0, \quad \delta dz^0 = \alpha_3 d\beta^0$$

wird, so folgt durch die gleiche Überlegung wie vorhin, daß:

$$(44) \quad \begin{cases} \delta d\epsilon^2 = d\alpha^0 d\beta^0 \\ \delta^2 d\epsilon^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) d\beta^{0^2} \end{cases}$$

ist. Der Vergleich mit (35) und (36) lehrt sofort, daß man auch

$$(35') \quad P = \sum_{i,j,h,k}^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a_{ij}^0 \partial a_{hk}^0} \gamma_i^0 \gamma_h^0 \pi_j \pi_k,$$

$$(36') \quad Q = \sum_{i,j}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial a_{ij}^0} \gamma_i^0 \pi_j - \Omega \gamma^{0^2}$$

schreiben kann, so daß  $P$  einfach die zweite Variation von  $\Omega$  (35'')  
 $P = \delta^2 \Omega$  für  $\delta a_{ij}^0 = \gamma_i^0 \alpha_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$   
 wird.

Nun ist es aber für die Stabilität des Gleichgewichtes notwendig<sup>1)</sup>, daß  $\delta^2 \Omega$  für alle Variationen der  $a_{ij}^0$  der Form  $\delta a_{ij}^0 = A_i B_j$  definit negativ sei. Ist also diese Stabilitätsbedingung erfüllt, so wird:

$$(39') \quad P < 0 \text{ für alle } \gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0, u, v, w.$$

#### § 4. Die unstetigen Lösungen der Bewegungsgleichungen und die Form $W$ .

Der Untersuchung der in dem Körper möglichen Wellen seien vorab die dazu nötigen Punkte aus der Theorie<sup>2)</sup> der unstetigen Lösungen partieller, einem Variationsproblem entspringender Differentialgleichungen vorausgeschickt.

Es werde dabei an die allgemeine Form I. (54) der Bewegungsgleichungen angeknüpft, jedoch  $\varepsilon$  mit seinen ersten Differentialquotienten als stetig vorausgesetzt, d. h. die Betrachtung auf adiabatische Wellen beschränkt.

Sollen nun die zweiten Differentialquotienten von  $x, y, z, t$  nach  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  an der „Wellenfläche“:

$$(45) \quad \begin{cases} \varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0 \\ d\varphi = \varphi_1 d\xi + \varphi_2 d\eta + \varphi_3 d\zeta + \varphi_4 d\tau \end{cases}$$

unstetig sein, so müssen sich unter Zuhilfenahme von vier Größen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  die sprungweisen Werteänderungen dieser Differentialquotienten beim Durchgang durch die Wellenfläche in der Form:

$$(46) \quad \left[ \frac{\partial^2 x_i}{\partial \xi_h \partial \xi_k} \right] = \lambda_i \varphi_h \varphi_k, \quad i, h, k = 1, 2, 3, 4$$

darstellen lassen, in welcher Forderung die sogen. Kompatibilitätsbedingungen gipfeln.

Bildet man dann weiter für:

$$(47) \quad \delta a_{ij} = \lambda_i \varphi_j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

1) J. Hadamard, Propagation des ondes. Paris 1903. art. 270.

2) J. Hadamard, l. c. Chap. VII.

die zweite Variation des kinetischen Potentials  $\Phi$ :

$$(48) \quad W = \delta^2 \Phi = \sum_{i,j,h,k}^4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a_{ij} \partial a_{hk}} \lambda_i \lambda_h \varphi_j \varphi_k,$$

so müssen die  $\lambda_i$ ,  $\varphi_i$  den Bedingungen:

$$(49) \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_4} = 0$$

genügen. Dies sind aber, da  $W$  eine quadratische Form der  $\lambda_i$  sowohl wie der  $\varphi_j$  ist, lineare homogene Gleichungen zwischen den  $\lambda_i$ , daher ihre Determinante, d. i. die Diskriminante der Form  $W$  bezüglich der  $\lambda_i$  verschwinden muß:

$$(50) \quad \left| \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right| = 0,$$

welche Gleichung eine Relation zwischen den  $\varphi_j$  allein — die partielle Differentialgleichung der Wellenfläche — darstellt.

Um ihre Bedeutung näher einzusehen, denke man sich die Gleichung (45) der Wellenfläche auf  $x, y, z, t$  umgerechnet:

$$(51) \quad \begin{cases} f(x, y, z, t) = 0, \\ df = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz + f_4 dt, \end{cases}$$

wobei die  $f_i$  mit den  $\varphi_j$  durch:

$$(52) \quad \varphi_j = \sum_{i=1}^4 a_{ij} f_i, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

zusammenhängen werden.

Bezeichnen dann  $n_1, n_2, n_3$  die Richtungs cosinusse der Wellennormale und  $\Theta$  die Normalengeschwindigkeit der Welle, so ist:

$$(53) \quad \begin{cases} f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = n_1 : n_2 : n_3 : -\Theta, \\ \Theta = \pm \frac{f_4}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}} \end{cases}$$

und es stellt sonach die in den  $\varphi_j$  homogene Gleichung (50) eine Relation zwischen  $n_1, n_2, n_3$  und  $\Theta$  dar.

Bei gegebener Wellennormale  $n_1, n_2, n_3$  folgen also erst aus (50) die möglichen Werte der Wellengeschwindigkeit  $\Theta$  und hierauf aus (49) die zugehörigen möglichen Richtungen des „Wellenvektors“  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ .

Ohne Beweis, weil im Zusammenhang nicht verwandt, sei schließlich noch bemerkt, daß die Richtungs cosinusse des Strahles  $s_1, s_2, s_3$  und die reziproke Strahlengeschwindigkeit  $s_4$  durch

$$(49') \quad s_1 : s_2 : s_3 : s_4 = \frac{\partial W}{\partial f_1} : \frac{\partial W}{\partial f_2} : \frac{\partial W}{\partial f_3} : \frac{\partial W}{\partial f_4}$$

gegeben werden.

§ 5. Darstellung der Form  $W$  und ihr Zusammenhang mit der Form  $I'$ .

Diese Form  $W(\lambda_i, \varphi_j)$ , welche sonach die Gesetze der Wellenfortpflanzung vollständig liefert, soll nun speziell für ein ruhendes Element hergestellt werden, da sich ja hinterher die für ein bewegtes Element geltenden Gesetze durch Lorentztransformation aus den für ein ruhendes gefundenen jederzeit gewinnen lassen.

Überdies kann, der Willkürlichkeit des Zeitparameters  $\tau$  entsprechend, stets angenommen werden, daß im betrachteten Raumzeitpunkt gerade

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0, \quad a_{44} = 1$$

ist, so daß man also mit den Ausgangswerten:

$$(54) \quad \begin{cases} a_{ij} = a_{ij}, & i, j = 1, 2, 3, \\ a_{14} = a_{41} = a_{24} = a_{42} = a_{34} = a_{43} = 0, \\ a_{44} = 1 \end{cases}$$

die zweite Variation von  $\Phi$  für  $\delta a_{ij} = \lambda_i \varphi_j$  zu bilden hat. Hierzu ist wieder zuerst:

$$(55) \quad \delta^2 \Phi = \sqrt{-A_{44}} \delta^2 \Omega + 2 \delta \Omega \delta \sqrt{-A_{44}} + \Omega \delta^2 \sqrt{-A_{44}},$$

$$(56) \quad \begin{cases} \delta \Omega = \sum_{ij}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij}, \\ \delta^2 \Omega = \sum_{ijhk}^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \delta e_{ij} \delta e_{hk} + \sum_{ij}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \delta^2 e_{ij}. \end{cases}$$

Zur Bildung der  $\delta e_{ij}$ ,  $\delta^2 e_{ij}$  aber hat man — eine analoge Überlegung wie in § 2 benützend — davon auszugehen, daß

$$(57) \quad \begin{cases} d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 - \frac{1}{A_{44}} dv^2, \\ dv = a_{14} dx + a_{24} dy + a_{34} dz - a_{44} dt \end{cases}$$

in  $d\xi$ ,  $d\eta$ ,  $d\zeta$ ,  $d\tau$  ausgedrückt, lautet:

$$(57') \quad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2d\epsilon^2.$$

Um nun wieder die Entwicklung der Form  $d\sigma^{*2}$ , in welche  $d\sigma^2$  bei Ersetzung der  $a_{ij}$  durch  $a_{ij} + \lambda_i \varphi_j$  übergeht, kurz auszuführen, setze man:

$$(58) \quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$(59) \quad \begin{cases} d\lambda = \lambda_1 dx + \lambda_2 dy + \lambda_3 dz, \\ d\varphi = \varphi_1 d\xi + \varphi_2 d\eta + \varphi_3 d\zeta \\ \quad = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \frac{f_i}{\Theta} dn, \\ dn = n_1 dx + n_2 dy + n_3 dz. \end{cases}$$

Bemerkt man dann, daß allgemein  $d\tau$  aus  $d\sigma^2$  herausfällt, also von vornherein  $d\tau = 0$  gesetzt werden darf, so gehen mit Rücksicht auf die speziellen Ausgangswerte (54) der  $a_{ij}$  die  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ,  $dt$ ,  $d\nu$ ,  $A_{44}$  bei Ersetzung der  $a_{ij}$  durch  $a_{ij} + \lambda_i \varphi_j$  über in:

$$(60) \quad \begin{cases} dx^* = dx + \lambda_1 d\varphi, & dy^* = dy + \lambda_2 d\varphi, \\ dz^* = dz + \lambda_3 d\varphi, & dt^* = \lambda_4 d\varphi, \end{cases}$$

$$(61) \quad \begin{cases} d\nu^* = \varphi_4 d\lambda - \lambda_4 d\varphi + (\lambda^2 - \lambda_4^2) \varphi_4 d\varphi, \\ A_{44}^* = -(1 + \lambda_4 \varphi_4)^2 + \lambda^2 \varphi_4^2. \end{cases}$$

Damit aber folgt ohne weiteres:

$$(62) \quad \begin{cases} d\sigma^{*2} = d\sigma^2 + 2d\lambda d\varphi \\ \quad + [\lambda^2 d\varphi^2 - 2\lambda_4 \varphi_4 d\lambda d\varphi + \varphi_4^2 d\lambda^2] + \dots, \end{cases}$$

also:

$$(63) \quad \begin{cases} \delta d\epsilon^2 = d\lambda d\varphi, \\ \delta^2 d\epsilon^2 = \lambda^2 d\varphi^2 - 2\lambda_4 \varphi_4 d\lambda d\varphi + \varphi_4^2 d\lambda^2 \end{cases}$$

und endlich gibt  $A_{44}^*$  noch:

$$(64) \quad \begin{cases} \delta \sqrt{-A_{44}} = \lambda_4 \varphi_4, \\ \delta^2 \sqrt{-A_{44}} = -\lambda^2 \varphi_4^2. \end{cases}$$

Alles in (55) eingesetzt, ergibt schließlich als Endresultat:

$$(65) \quad \Theta^2 f_4^{-2} W = \sum_{ijhk}^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \epsilon_{ij} \epsilon_{hk} + \sum_{ij}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \epsilon_{ij}^* - \Theta^2 \Omega \lambda^2,$$

wobei die  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$  durch:

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda \, dn = \sum_1^3 \varepsilon_{ij} \, d\xi_i \, d\xi_j, \\ \lambda^2 \, dn^2 + \Theta^2 \, d\lambda^2 = \sum_1^3 \varepsilon_{ij}^* \, d\xi_i \, d\xi_j \end{array} \right.$$

definiert sind.

Der Vergleich mit der Darstellung (29) von  $\Gamma$  liefert:

$$(67) \quad f_4^{-2} \Theta^2 W = P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, n_1, n_2, n_3) + \Theta^2 Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Die Größe  $\lambda_4$  fällt — wie es der Willkürlichkeit des Zeitparameters entspricht — aus  $W$  heraus, daher man die vierte der Gleichungen (49) zu streichen, und in (50) die Diskriminante von  $W$  nach  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  zu setzen hat.

#### § 6. Die adiabatischen Wellen.

Einer jeden Wellennormale  $n_1, n_2, n_3$  sind also durch die Gleichung dritten Grades in  $\Theta^2$ :

$$(68) \quad \left| \frac{\partial^3 P}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + \Theta^2 \frac{\partial^3 Q}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right| = 0$$

drei mögliche Wellengeschwindigkeiten und diesen entsprechend dann durch:

$$(69) \quad \frac{\partial P}{\partial \lambda_i} + \Theta^2 \frac{\partial Q}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

drei mögliche Richtungen des Wellenvektors  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  zugeordnet. Insbesondere besteht zwischen  $n_i, \lambda_i, \Theta^2$  nach (69) die Beziehung:

$$(70) \quad P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, n_1, n_2, n_3) + \Theta^2 Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0.$$

Wird nun die in § 1 genannte Annahme bezüglich des Trägheitswiderstandes gemacht und die in § 3 genannte Stabilitätsbedingung als erfüllt angenommen, so läßt sich über die Wurzeln  $\Theta^2$  von (68) des näheren folgendes aussagen:

Da in der linearen Formenschar  $P + \Theta^2 Q$  die Form  $Q$  definit ist, sind die drei Wurzeln  $\Theta^2$  sicher reell und endlich, und da stets  $P < 0$ ,  $Q > 0$  ist, wegen (70) nie negativ, also die Werte von  $\Theta$  selbst immer reell.



Weiter ist nach (39) für  $0 \leq s < 1$  immer

$$(71) \quad s^2 P + Q \geq 0,$$

also vermöge (70):

$$(72) \quad (1 - s^2 \Theta^2) Q \geq 0,$$

somit wegen  $Q > 0$ :

$$(73) \quad 1 - s^2 \Theta^2 \geq 0 \quad \text{oder} \quad \Theta^2 \leq \frac{1}{s^2}, \text{ d. h. } \Theta \leq 1.$$

Zu jeder Wellennormale gehören sonach immer drei mögliche Wellengeschwindigkeiten, welche die Einheit, d. i. die Lichtgeschwindigkeit niemals übersteigen, und ihnen entsprechend drei mögliche Richtungen des Wellenvektors.

Diese drei Richtungen lassen sich geometrisch definieren als das den beiden Ellipsoiden

$$(74) \quad \begin{cases} P(x, y, z, n_1, n_2, n_3) = -1, \\ Q(x, y, z) = +1 \end{cases}$$

gemeinsame Tripel von wechselseitig konjugierten Durchmesser. Bezeichnen  $l_1, l_2, l_3$  die Komponenten des Wellenvektors  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  nach diesen drei Richtungen, und  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  die ihnen entsprechenden Wellengeschwindigkeiten, so ist

$$(75) \quad \begin{cases} -P(\lambda_i, n_i) = m_1 \Theta_1^2 l_1^2 + m_2 \Theta_2^2 l_2^2 + m_3 \Theta_3^2 l_3^2, \\ Q(\lambda_i, n_i) = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2, \\ m_i > 0. \end{cases}$$

Sind daher  $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$  die Komponenten der Ruhbeschleunigung nach den der Geschwindigkeitsrichtung als Wellennormale entsprechenden drei Richtungen des Wellenvektors, so nimmt  $\Gamma$  die Form an:

$$(76) \quad \begin{cases} \beta^3 \Gamma = m_1 (1 - s^2 \Theta_1^2) \gamma_1^{02} + m_2 (1 - s^2 \Theta_2^2) \gamma_2^{02} \\ \quad + m_3 (1 - s^2 \Theta_3^2) \gamma_3^{02}. \end{cases}$$

#### § 7. Zusammenhang der longitudinalen und transversalen Wellen mit der longitudinalen und transversalen Trägheit.

Kommt dem Körper lediglich ein transversaler und ein longitudinaler Trägheitskoeffizient  $\mu_t$  und  $\mu_l$  zu, und ist  $\mu^0$  ihr gemeinsamer bloß von den  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) abhängiger Ruhwert, so wird:

$$(77) \quad \Gamma = \mu_l \gamma_i^2 + \mu_t \gamma_i^2 = \mu_l \beta^{-6} \gamma_i^{02} + \mu_t \beta^{-4} \gamma_i^{02}$$

und daraus:

$$(78) \quad \begin{cases} Q = \Gamma_0 = \mu^0 \gamma_1^0{}^2 + \mu^0 \gamma_t^0{}^2, \\ P = \beta^3 \Gamma - \Gamma_0 = (\mu_t \beta^{-3} - \mu^0) \gamma_t^0{}^2 + (\mu_t \beta^{-1} - \mu^0) \gamma_t^0{}^2. \end{cases}$$

Da nun  $P$  eine quadratische Form der  $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0$  sowohl wie der  $u, v, w$  mit nur von den  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) abhängigen Koeffizienten ist, so muß wegen:

$$(79) \quad s \gamma_i^0 = u \gamma_1^0 + v \gamma_2^0 + w \gamma_3^0, \quad \gamma_i^0{}^2 + \gamma_t^0{}^2 = \gamma_1^0{}^2 + \gamma_2^0{}^2 + \gamma_3^0{}^2$$

sein:

$$(80) \quad \begin{cases} \mu_t \beta^{-3} - \mu^0 = -a \mu^0 s^2, & \text{oder} \quad \mu_t = \mu^0 (1 - a s^2) \beta^3, \\ \mu_t \beta^{-1} - \mu^0 = -b \mu^0 s^2 & \mu_t = \mu^0 (1 - b s^2) \beta, \end{cases}$$

wo  $a, b$  ebenso wie  $\mu^0$  bloß von den  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) abhängen, womit dann:

$$(81) \quad \begin{cases} -P = \mu^0 s^2 (a \gamma_t^0{}^2 + b \gamma_t^0{}^2), \\ Q = \mu^0 (\gamma_t^0{}^2 + \gamma_t^0{}^2) \end{cases}$$

wird. Sind also  $\lambda_t$  und  $\lambda_i$  die longitudinale und transversale Komponente des Wellenvektors  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , d. h. parallel und normal zur Wellennormale genommen, so wird:

$$(82) \quad \begin{cases} -P(\lambda_i, n_i) = \mu^0 (a \lambda_t^2 + b \lambda_i^2), \\ Q(\lambda_i) = \mu^0 (\lambda_t^2 + \lambda_i^2). \end{cases}$$

Der Vergleich mit (75) lehrt, daß der Wellenvektor entweder parallel (Longitudinalwellen) oder normal (Transversalwellen) zur Wellennormale liegen muß, und daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Wellenarten sind:

$$(83) \quad \Theta_t = \sqrt{a}, \quad \Theta_i = \sqrt{b}.$$

Nimmt man umgekehrt die Möglichkeit rein longitudinaler und rein transversaler Wellen der Geschwindigkeiten  $\Theta_t$  und  $\Theta_i$  an, so müssen irgend zwei zueinander normale Richtungen konjugierte Durchmesser des zweiten Ellipsoides (74), dieses also eine Kugel sein:

$$(84) \quad Q(\lambda_i) = \mu^0 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Das gemeinsame Tripel konjugierter Durchmesser wird die Wellennormale in Verbindung mit irgend zwei zu ihr und zu einander normalen Richtungen, d. h. nach (75):

$$(85) \quad -P(\lambda_i, n_i) = \mu^0 (\Theta_i^2 \lambda_i^2 + \Theta_i^2 \lambda_i^2).$$

Also wird:

$$(86) \quad \beta^3 \Gamma = \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^{02} + \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^{02},$$

$$(87) \quad \Gamma = \mu^0 \beta^3 (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^2 + \mu^0 \beta (1 - s^2 \Theta_i^2) \gamma_i^2$$

und es kommt somit dem Körper lediglich ein longitudinaler und ein transversaler Trägheitskoeffizient:

$$(88) \quad \mu_t = \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \beta^3, \quad \mu_i = \mu^0 (1 - s^2 \Theta_i^2) \beta$$

zu.

Transversal- und Longitudinalwellen einerseits und Transversal- und Longitudinalträgheit andererseits bedingen sich also gegenseitig und die Trägheitskoeffizienten sind mit den Wellengeschwindigkeiten stets durch (88) verknüpft.

#### § 8. Die adiabatischen Gaswellen.

Daß einer Flüssigkeit lediglich ein longitudinaler und ein transversaler Trägheitskoeffizient zukommt, wurde bereits in I. § 10 festgestellt und gefunden:

$$(89) \quad \begin{cases} \mu_t = (\Delta \Omega_A - \Omega + s^2 \Delta^2 \Omega_{AA}) \beta^3, \\ \mu_i = (\Delta \Omega_A - \Omega) \beta. \end{cases}$$

Es sind in ihr also auch bloß Longitudinal- und Transversalwellen mit den Geschwindigkeiten:

$$(90) \quad \Theta_t = \sqrt{\frac{\Delta^2 \Omega_{AA}}{\Omega_A - \Delta \Omega_A}}, \quad \Theta_i = 0,$$

d. h. Longitudinalwellen allein möglich.

Bei Einführung von Druck und Ruhenergie:

$$(91) \quad p = \Omega_A, \quad \Theta^0 = -\frac{\Omega}{\Delta}$$

wird einfach:

$$(90) \quad \Theta_t = \sqrt{\frac{dp}{d\Theta^0}}.$$

§ 9. Die adiabatischen, elastischen Wellen bei verschwindenden Ruhdeformationen.

Im Falle des elastischen isotropen Körpers (vgl. I. § 12) mit:

$$(92) \quad \Omega = -M - \frac{1}{2} A J_1^2 + 2 B J_2$$

mag die Form  $\Gamma$  bloß für verschwindende Ruhdeformationen —  $e_{ij} = 0$  — berechnet werden. In ihrer Darstellung (29) ist dann:

$$(93) \quad \Omega = -M, \quad \sum_{i,j}^3 \frac{\partial \Omega}{\partial e_{ij}} \varepsilon_{ij}^* = 0$$

zu setzen, wogegen, weil  $J_1^2, J_2$  quadratische Formen der  $e_{ij}$  sind:

$$(94) \quad \sum_{i,j,h,k}^3 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial e_{ij} \partial e_{hk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{hk} = -A \bar{J}_1^2 + 4 B \bar{J}_2$$

wird, falls  $\bar{J}_1, \bar{J}_2$  die mit den  $\varepsilon_{ij}$  statt der  $e_{ij}$  gebildeten Ausdrücke I. (123) von  $J_1, J_2$  bedeuten. Die Werte (33) der  $\varepsilon_{ij}$  liefern für diese:

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3, \\ -4 \bar{J}_2 = (\pi_2 x_3 - \pi_3 x_2)^2 + (\pi_3 x_1 - \pi_1 x_3)^2 + (\pi_1 x_2 - \pi_2 x_1)^2 \\ \quad = (\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \bar{J}_1^2. \end{array} \right.$$

Da aber für  $e_{ij} = 0$

$$dx^{0^2} + dy^{0^2} + dz^{0^2} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

wird, also die  $a_{ij}^0$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) dann die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation sind, ergibt die Substitution der Werte (32) der  $\pi_i, x_i$  weiter:

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}_1 = u \gamma_1^0 + v \gamma_2^0 + w \gamma_3^0 = s \gamma_i^0, \\ -4 \bar{J}_2 = s^2 \gamma^{0^2} - s^2 \gamma_i^{0^2} = s^2 \gamma_i^{0^2}. \end{array} \right.$$

Damit wird schließlich:

$$(96) \quad \beta^3 \Gamma = M \gamma^{0^2} - A s^2 \gamma_i^{0^2} - B s^2 \gamma_i^{0^2},$$

$$(97) \quad \Gamma = (M - A s^2) \beta^3 \gamma_i^2 + (M - B s^2) \beta \gamma_i^2.$$

Es besitzt also der Körper lediglich einen transversalen und einen longitudinalen Trägheitskoeffizienten:

$$(98) \quad \mu_t = (M - A s^2) \beta^2, \quad \mu_l = (M - B s^2) \beta, \quad \mu_t^0 = \mu_l^0 = M$$

und es pflanzen sich in ihm rein longitudinale und transversale Wellen mit den Geschwindigkeiten:

$$(99) \quad \Theta_t = \sqrt{\frac{A}{M}}, \quad \Theta_l = \sqrt{\frac{B}{M}}$$

fort.

Die Elastizitätskoeffizienten  $A, B$  sind an die Bedingung:

$$(100) \quad 0 < A < M, \quad 0 < B < M$$

gebunden.

Leipzig, Juli 1911.

(Eingegangen 24. Juli 1911.)

### 3. Zur Theorie der Strahlungserscheinungen<sup>1)</sup>; von A. Joffé.

#### Erster Teil.

#### Entropie der Strahlung.

Die Strahlungstheorie, wie sie hauptsächlich durch W. Wien und M. Planck entwickelt worden ist, ist eine Theorie der „schwarzen Strahlung“. Wie wesentlich dies Problem auch ist, so berührt es doch nur eine Seite der Strahlungserscheinungen. Für die in den letzten Jahren so stark ausgedehnte experimentelle Forschung der „eigentlichen Lichtwirkungen“ (Photoelektrizität, Photochemie, Fluoreszenz, Lichtionisation) erwies sich diese Theorie recht unfruchtbar.

A. Einstein ist es gelungen, viele empirische Gesetzmäßigkeiten in den erwähnten Erscheinungen durch die Anwendung und Erweiterung der Energiequantenhypothese theoretisch zu erklären. Eine quantitative Durchführung der Theorie liegt aber noch nicht vor.

Betrachten wir die verschiedenen Lichtwirkungen, so sehen wir zunächst, daß sie nicht ohne weiteres in den Rahmen der thermodynamischen Theorie passen. Man würde nämlich erwarten, daß die Wirksamkeit des Lichtes durch seine schwarze Temperatur (eine Funktion der Schwingungszahl und Energiedichte) bestimmt wird. Statt dessen kann man, abgesehen von dem speziellen Mechanismus, folgenden allgemeinen Zug an den spezifischen Lichtwirkungen feststellen: 1. *Die Wirksamkeit des Lichtes wächst mit der Schwingungszahl  $\nu$  unabhängig von der Energiedichte*; 2. *Die Wirkung hängt für bestimmtes  $\nu$  nur von der Gesamtmenge des absorbierten Lichtes ab.*

1) Vorgetragen in der Russischen Physikalischen Gesellschaft am 27. September 1910.

Allerdings hat die Strahlungsquelle immer eine höhere Temperatur als die untersuchte Substanz. Im Spektrum der Strahlungsquelle, wo alle Farben annähernd die gleiche Temperatur besitzen, erweist sich aber meist das violette Ende wirksam; die Absorption der betreffenden Farbe ist dabei eine notwendige Bedingung. Die Grenze zwischen wirksamem und unwirksamem Licht hängt nicht von der Temperatur der Strahlungsquelle ab oder von der schwarzen Temperatur des Strahlenbündels; das wirksame Licht kann, ohne unwirksam zu werden, auf dem Wege mehrfach geschwächt werden. Für die photoelektrischen Erscheinungen und die Lichtionisation gilt dies ausnahmslos; für photochemische Reaktionen scheint es, wenigstens für eine Verschiebung des vollständigen Gleichgewichtes durch Licht, richtig zu sein. Bei der Phosphoreszenz kommt diese Tendenz auf die Stokessche Regel hinaus, die zwar die Mehrzahl der untersuchten Stoffe umfaßt, oft aber sicher nicht erfüllt ist. Im folgenden wird versucht, durch eine etwas andere Formulierung diese Ausnahmen für die Regel unschädlich zu machen.

Auch wenn die allgemeine Tendenz der Lichterscheinungen richtig charakterisiert wurde, könnte sie durch einen speziellen *Mechanismus* erklärt werden. Man würde z. B. an die ultravioletten Eigenschwingungen denken oder eine spezielle Art der innermolekularen Kräfte voraussetzen können.

Man kann aber auch die formulierten Gesetzmäßigkeiten als den Ausdruck einer allgemeinen Eigenschaft der *Strahlung* ansehen. Im folgenden will ich versuchen, die Konsequenzen aus dieser letzteren Annahme zu ziehen, ohne zunächst zu der spezielleren atomistischen Hypothese zu greifen.

#### § 1. Reversible Kreisprozesse mit monochromatischer Strahlung.

Da wir also die Schwingungszahl  $\nu$  (oder eine Funktion von  $\nu$ ) als einen Intensitätsparameter der Strahlungsenergie anzusehen haben, wollen wir die Arbeitsfähigkeit einer gleichmäßig zerstreuten Strahlung in Abhängigkeit von  $\nu$  berechnen. Damit  $\nu$  eine klare Bedeutung bekommt, wollen wir eine annähernd monochromatische zerstreute Strahlung betrachten, die in einen Raum mit weißen Wänden eingeschlossen ist. In Analogie mit dem Carnotschen Kreis-

prozesse führen wir mit der Strahlung einen Kreisprozeß aus, der aus zwei „Isochromen“ und zwei „Adiabaten“ besteht. Die „Isochromen“ führen wir mit Hilfe von zwei Reservoiren aus, die mit Strahlung von den Schwingungszahlen  $\nu_1$  bis  $\nu_1 + \Delta\nu_1$  und  $\nu_2$  bis  $\nu_2 + \Delta\nu_2$  erfüllt sind. Von den Reservoiren setzen wir voraus, daß durch Verbrauch der Strahlungsenergie ihre Energiedichte und Schwingungszahl nur unendlich wenig geändert werden. (Sie müssen in demselben Sinne unendlich groß sein, wie die Wärmereservoire des Carnotschen Kreisprozesses.) Die „Isochrome“ kommt bei dieser Annahme auf eine Adiabate mit einem angehängten unendlichen Volumen hinaus. Geben wir die Möglichkeit einer Membran zu, die nur ein bestimmtes Farbenintervall durchläßt, alle anderen aber reflektiert — und eine solche Annahme scheint vorläufig zu keinen Widersprüchen zu führen — so können wir die Isochromen auch auf eine andere Weise realisieren: Wir benutzen nämlich zwei Körper von solchen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ , daß die Schwingungszahlen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  die nötigen Energiedichten  $u_1$  und  $u_2$  bekommen, und trennen die Körper von der Strahlung durch entsprechende Membranen.<sup>1)</sup>

1) Es muß hier noch ein Einwand gegen die Reversibilität der betrachteten Prozesse besprochen werden, den Hr. M. Planck mir brieflich mitteilte: Bei der adiabatischen Kompression einer zerstreuten Strahlung wird sie nicht mehr monochromatisch bleiben, sondern auf das ganze endliche Intervall von  $\nu_1$  bis  $\nu_2$  verbreitet. In der Tat werden bei einer endlichen Kompression mit endlicher Geschwindigkeit solche Strahlen vorkommen, die auf die bewegliche Wand *immer* streifend auffallen und ihre Schwingungszahl gar nicht ändern; andererseits kommen auch solche Strahlen vor, die fortwährend senkrecht auffallen und so die maximale Farbenänderung erfahren; dazwischen kommen alle Zwischenstufen vor. Das Farbenintervall  $\nu_1$  bis  $\nu_1 + \Delta\nu_1$  wird in ein endliches Intervall zersplittert. Tragen wir für die komprimierte Strahlung  $\nu$  als Abszisse und  $U$ , als Ordinate auf, so erhalten wir eine Kurve, die uns angibt, wie oft bestimmte Strahlengänge vorkommen. Nehmen wir die Wände vollkommen weiß an, so wird nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Zersplitterungskurve erhalten, deren Maximum um so schärfer ist, je öfter die bewegliche Wand von der zurückgeworfenen Strahlung wieder getroffen wird. Gehen wir zu dem Grenzfall unendlich langsamer Kompression über, so zieht sich die Kurve ganz auf das unendlich enge Gebiet zusammen, das durch das W. Wiensche Verschiebungsgesetz bestimmt wird.

Würden wir einen absolut spiegelnden Raum voraussetzen, so ver-



Die zugeführte Strahlungsenergie  $dL$  setzen wir

$$dL = dU + p dV,$$

$$U = u \cdot V = 3p \cdot V,$$

wo  $U$  die Energie,  $p$  den Druck und  $V$  das von der Strahlung eingenommene Volumen bedeutet.

Für die auf der Isochrome 1—2 zugeführte Energie bekommen wir, indem wir

$$v = v_1 = \text{Const.}, \quad p = p_1 = \text{Const.}$$

setzen:

$$L_1 = 4p_1(V_2 - V_1).$$

Auf der Isochrome 3—4 wird die Energie

$$-L_{II} = 4p_3(V_3 - V_4)$$

abgeführt.

Für die beiden Adiabaten haben wir die Gleichungen:

$$dL = 0, \quad p \cdot V^{4/3} = \text{Const.}, \quad v \cdot V^{1/3} = \text{Const.}$$

Daraus folgt

$$\frac{L_1}{-L_{II}} = \frac{v_1}{v_2},$$

oder

$$\frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2} = 0.$$

Gehen wir jetzt zu einem beliebigen reversiblen Kreisprozeß über, so können wir ihn durch elementare Zyklen der betrachteten Art ersetzen. Die zugeführten Strahlungsmengen unterscheiden sich von den wirklichen um kleine Größen zweiter Ordnung. Es gilt also für einen beliebigen reversiblen Kreisprozeß:

$$\int_1^1 \frac{dL}{v} = 0.$$

schwindet zwar die Zersplitterung nicht, doch werden die verschiedenfarbigen Strahlen ihre Richtung immer behalten und bei der unendlich langsamen Dilatation die genau entgegengesetzte Farbenänderung erfahren und am Ende wieder monochromatisch werden.

Somit wird man wohl den Grenzfall der *unendlich langsamen Kompression* nicht nur für schwarze, sondern auch für *jede beliebig zusammengesetzte Strahlung* (z. B. auch monochromatische) für *vollkommen reversibel* ansehen dürfen.

Setzen wir

$$\frac{dL}{\nu} = dW,$$

$$dL = \nu dW,$$

so ist für die betrachteten Prozesse  $W$  eine Zustandsfunktion der Strahlung, deren Änderung durch

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 \frac{dL}{\nu}$$

gebildet, auf einem beliebigen reversiblen Wege gegeben ist.

§ 2. Eine Verallgemeinerung der Funktion  $W$  auf beliebig zusammengesetzte Strahlung.

Um den Zusammenhang der Größe  $W$  mit der Entropie herzustellen, hätten wir einen reversiblen Übergang von Wärme in Strahlung zu betrachten, z. B. die Emission eines schwarzen Körpers. Dabei stoßen wir aber auf die Schwierigkeit, daß  $\nu$  nur für monochromatisches Licht definiert worden ist.

Eine naheliegende Verallgemeinerung der Größe  $W$  kann durch Einführung eines Mittelwertes  $\bar{\nu}$  für die zusammengesetzte Strahlung erreicht werden. Die Bildung des Mittelwertes ist vorläufig nur an eine Bedingung geknüpft: Die Gleichung der Adiabate  $\bar{\nu} V^{1/2} = \text{Const.}$  muß ihre Form unverändert beibehalten, dann bleibt das Resultat des § 1 auch für die verallgemeinerte Definition von  $W$

$$dW = \frac{dL}{\bar{\nu}}$$

bestehen.

Für die Definition von  $\bar{\nu}$  können wir z. B. einen der folgenden Ansätze benutzen (ihre physikalische Begründung wird weiter unten gegeben).

$$(1) \quad \bar{\nu} = \frac{\int_0^\infty u_\nu d\nu}{\int_0^\infty \frac{u_\nu}{\nu} d\nu},$$

$$(2) \quad \log \bar{\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{u_{\nu}}{\nu} \log \nu d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{u_{\nu}}{\nu} d\nu},$$

$$(3) \quad \bar{\nu} = \frac{\int_0^{\infty} u_{\nu} \nu d\nu}{\int_0^{\infty} u_{\nu} d\nu}.$$

Daß diese Definitionen in der Tat der gestellten Bedingung genügen, ersieht man, wenn man eine adiabatische Kompression betrachtet und für (1) und (3)  $\bar{\nu}_1/\bar{\nu}_2$ , für die Definition (2)  $\log \nu_1 - \log \nu_2$  bildet. Setzt man für die einzelnen Farben

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V_2^{1/3}}{V_1^{1/3}}, \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{V_2^{1/2}}{V_1^{1/2}},$$

so folgt es auch für  $\bar{\nu}$ .

Ohne aber eine bestimmte Definition von  $\bar{\nu}$  zu benutzen, und ohne die wirkliche Energieverteilung der schwarzen Strahlung zu kennen, sehen wir, daß für die schwarze Strahlung

$$\bar{\nu} = a T$$

ist, sobald die Definition von  $\bar{\nu}$  so getroffen ist, daß bei adiabatischer Kompression

$$\bar{\nu} V^{1/3} = \text{Const.}$$

ist, denn für die schwarze Strahlung haben wir bekanntlich

$$T^3 V = \text{Const.}$$

Daraus folgt aber auch

$$dW = \frac{dL}{\bar{\nu}} = \frac{dQ}{a T} = \frac{1}{a} dS.$$

Für die schwarze Emission ist die emittierte  $W$ -Größe dem Entropieverlust proportional. Der Zahlenfaktor  $a$  hängt von der Art der Mittelbildung für  $\bar{\nu}$  und der Energieverteilung im Spektrum der schwarzen Strahlung ab.

Wählen wir die Definition (1) und die Plancksche Energieverteilung, so folgt

$$a = 5,8 \cdot 10^{10}.$$

Die Definition (3) gibt

$$a = 6,0 \cdot 10^{10}.$$

### § 3. Das Verhalten der Funktion $W$ bei irreversiblen Prozessen.

Die dargelegte Auffassung von der Bedeutung der Schwingungszahl als eines Intensitätsparameters der Strahlung könnte in Form eines „Stokesschen“ Postulates ausgesprochen werden: „Die Strahlung kann nicht ohne Kompensation von kleinerem  $\bar{\nu}$  zu größerem  $\bar{\nu}$  übergehen.“  $\bar{\nu}$  spielt dabei die Rolle der Temperatur; die Bedeutung der Strahlungsentropie hätte dann die Größe  $W$ . Wenn wir auch nicht das ausnahmslose Wachstum von  $W$  bei irreversiblen Strahlungsvorgängen nachweisen können, so läßt sich das in einigen typischen Fällen leicht übersehen; andererseits scheint kein Fall bekannt zu sein, bei dem  $W$  in einem von Ausstrahlung isolierten System abnehmen würde. Um die Berechtigung dieser Auffassung zu begründen, wollen wir einige irreversiblen Erscheinungen betrachten.

#### 1. Ausbreitung der Strahlung ohne Arbeitsleistung.

Zur Ausrechnung von  $W$  bei diesem irreversiblen Vorgang ersetzen wir ihn durch einen reversiblen, der den gleichen Anfangs- und Endzustand hat. Wir setzen unsere Strahlung in Verbindung mit Strahlungsreservoirien von demselben  $\bar{\nu}$ , aber veränderlicher Energiedichte und zwar so, daß die Gesamtenergie der Strahlung während des ganzen Prozesses konstant bleibt. Wir erhalten dann:

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 \frac{dL}{\bar{\nu}} = \frac{1}{\bar{\nu}} \int_1^2 dL = \frac{1}{\bar{\nu}} \int_1^2 p dV = \frac{U}{3\bar{\nu}} \log \frac{V_2}{V_1},$$

also  $W_2 > W_1$ .

Als einen Spezialfall kann man die Zerstreuung eines gerichteten Strahlenbündels ansehen, da ein solches Bündel auf reversiblen adiabatischen Wege in ein kleineres Volumen zusammengedrängt werden kann. In der Ausbreitung einer

Strahlung ohne Arbeitsleistung ist ja auch nur die letzte Phase — die Zerstreuung in dem neuen Volumen irreversibel und mit einer Vergrößerung von  $W$  verknüpft.

## 2. Vermischung verschiedener Farben.

Dieser Vorgang könnte reversibel geleitet werden, wenn die Annahme von der Möglichkeit halbdurchlässiger Membranen richtig wäre. Dann wäre eine Vermischung in demselben Volumen reversibel ohne Arbeitsleistung möglich. Die Rechnung wäre dann der Diffusion idealer Gase vollkommen analog. Eine Annahme, die im zweiten Teil eingeführt wird, würde schon für die Vermischung in demselben Volumen ein Wachstum von  $W$  ergeben. Jedenfalls steigt also  $W$  bei der Vermischung in einem Raume, der alle einzelnen Strahlungen umfaßt.

## 3. Farbenänderung.

Eine irreversible Farbenänderung tritt bei den Vorgängen der Phosphoreszenz und Fluoreszenz ein. Wenn die Energie nicht aus dem innermolekularen Vorrat stammt, sondern aus der einfallenden Strahlung, so darf niemals die Summe der Wärmeentropie und der mit  $a$  multiplizierten  $W$ -Größe abnehmen.

In den meisten Fällen, die der Stokesschen Regel genügen, ist diese Forderung sicher erfüllt: Die erregende Strahlung von großem  $\bar{\nu}$  geht zum Teil in das kleinere  $\bar{\nu}$  des Phosphoreszenzlichtes, zum anderen Teil in noch kleineres  $\bar{\nu} = aT$  der Wärme über. Es kann dabei eventuell auch mechanische Energie zur Aussendung von Elektronen frei verfügbar bleiben.

Die Fälle dynamischen Gleichgewichtes des Phosphoreszenzlichtes und einer ultraroten Einstrahlung sind noch nicht genügend untersucht, um zu quantitativen Schlüssen über  $W$  verwendet zu werden.

Die Ausnahmen von der Stokesschen Regel kann man in zwei Gruppen trennen: 1. Scheinbare, bei denen zwar im Fluoreszenzlicht größere  $\nu$  als die erregenden vorkommen, das mittlere  $\bar{\nu}$  aber kleiner als das  $\bar{\nu}$  des erregenden Lichtes ist. 2. Wesentliche, bei denen auch das  $\bar{\nu}$  des Fluoreszenzlichtes größer ist. Solche Fälle sind aber gerade durch besonders starke Absorption des einfallenden Lichtes ausgezeichnet. Die

quantitativen Verhältnisse liegen hier so, daß die Abnahme von  $W$  beim Übergang zu größeren  $\bar{\nu}$ , durch das Wachstum bei der Absorption durch einen verhältnismäßig kalten Körper mit Sicherheit überkompensiert wird.

#### 4. Verwandlung der strahlenden Energie in elektrische.

Wenn wir annehmen, daß das Licht keine auslösende Rolle bei dem photoelektrischen Effekt spielt, müssen wir fordern: 1. daß ein Teil des Lichtes absorbiert wird, 2. daß die Schwingungszahl  $\bar{\nu}_e$  des erregenden Lichtes größer sei, als des  $\bar{\nu}_a$  der emittierten Wärme- oder Lumineszenzstrahlung und 3. daß die in elektrischer Form aufgespeicherte Energie nicht über einen bestimmten Bruchteil der einfallenden Energie geht, der mit der Schwingungszahl  $\bar{\nu}_e$  in bestimmter Weise wächst. Soweit experimentelles Material vorhanden ist, scheinen diese Forderungen immer erfüllt zu sein.

#### 5. Photochemische Erscheinungen.

In diesem Gebiete sind schon mit Sicherheit Fälle festgestellt worden, bei denen das Licht nicht auslösend wirkt, sondern das vollständige thermodynamische Gleichgewicht verschiebt. Hier müssen folglich die Forderungen 2. und 3. des vorher besprochenen Falles erfüllt sein, was auch durch die hohen Schwingungszahlen des wirksamen Lichtes verbürgt ist. Auch hier reichen die experimentellen Daten nicht aus, eine quantitative Prüfung der Frage durchzuführen. Diesbezügliche Messungen sind jetzt im Gange.

In all diesen Fällen, die die Strahlung recht vielseitig charakterisieren, scheint die Irreversibilität mit einem Wachstum von  $W$  verknüpft zu sein. Eine direkte Ausnahme ist nicht nachweisbar.

#### § 4. Die Funktion $W$ und die Entropie der Strahlung.

Die Funktion  $W$  hat somit folgende Eigenschaften:

1.  $W$  ist eine Zustandsfunktion der Strahlung, deren Änderung für reversible Prozesse durch

gemessen wird.

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 \frac{dL}{\bar{\nu}}$$

2.  $W$  bleibt bei adiabatischen reversiblen Prozessen konstant.

3. Für die schwarze Strahlung fällt  $W$  mit der Wärmeentropie  $S$  bis auf einen Zahlenfaktor  $1/a$  zusammen.

4.  $W$  wächst bei den typischen irreversiblen Strahlungserscheinungen.

5. Eine Abnahme von  $\left(W + \frac{1}{a}S\right)$  für ein isoliertes System kann bei dem gegenwärtigen Stande der experimentellen Forschung nicht behauptet werden (Stokessches Postulat).

Bei dieser Sachlage scheint es zulässig zu sein, die Funktion  $W$  als eine Verallgemeinerung der Entropie auf beliebige Strahlung anzusehen.

Die Aussage von dem Verhalten der Funktion  $W$  fällt nicht mit der Eigenschaft zusammen, die man einem Strahlenbündel zuschreiben würde, wenn man seine Wirksamkeit durch die schwarze Temperatur bestimmt. Für die photoelektrischen und photochemischen Erscheinungen würde man statt  $\bar{\nu}_e > \bar{\nu}_a$  entsprechend  $T_e > T_a$  fordern, was ja auch erfüllt ist, da dies eine notwendige Bedingung für die Energieabsorption ist. Wir erwarten aber mehr, nämlich, daß nur derjenige Teil der Strahlung eines heißen Körpers wirksam sein kann, dessen  $\bar{\nu}$  größer ist, als die mittlere Schwingungszahl der vom untersuchten Körper ausgehenden Strahlung. Die Unabhängigkeit der Geschwindigkeit der photoelektrischen Elektronen von der Lichtstärke und die ausschließliche Wirksamkeit des kurzwelligen Teiles bei photochemischen Prozessen scheinen für unsere speziellere Forderung zu sprechen.

Ist die Größe  $W$  mit der Entropie identisch, so muß für reversible Emission eines jeden Körpers  $\bar{\nu} = aT$  sein. Daraus würde z. B. folgen, daß die „mittlere Schwingungszahl“  $\bar{\nu}$  im Serienspektrum der absoluten Temperatur proportional steigen muß. Die experimentelle Forschung über Energieverschiebung in einer Serie scheint mit dieser Forderung qualitativ im Einklang zu stehen. Ob der Proportionalitätsfaktor eine universelle Größe ist, läßt sich kaum übersehen.

Als ein wichtiger Einwand gegen die Identität von  $W$  mit der Entropie muß die Tatsache betrachtet werden, daß der Ausdruck für  $W$  bei monochromatischer Strahlung nicht

mit dem Entropieausdruck zusammenfällt, den M. Planck aus seiner Theorie der schwarzen Strahlung berechnet hat. Es muß aber bemerkt werden, daß der Plancksche Ausdruck nicht direkt, sondern erst an seinen Folgen für die Energieverteilung in der schwarzen Strahlung bestätigt wurde. Die Ableitung der Energieverteilung benutzt aber noch andere Hypothesen, z. B. die der reversiblen Vermischung verschiedener Farben — die Bestimmung der Entropie einer Farbmischung, als die Summe der Entropien der Einzelfarben. Eine andere Hypothese, die, wie es scheint, auch zu keinen Widersprüchen führt, wird im zweiten Teil als Grundlage der Definition 1 für  $\bar{\nu}$  angegeben.

Ohne einen bestimmten Ansatz für  $\bar{\nu}$  oder einer entsprechenden Hypothese scheint die Frage nach der Energieverteilung nicht eindeutig bestimmt zu sein.

Die dargelegte Theorie liefert dagegen eine Reihe von Beziehungen für die „eigentlichen Lichtwirkungen“. Jeder quantitativ untersuchte Fall des photochemischen Gleichgewichtes, der Photoelektrizität und der Photolumineszenz, der Emission von Serienlinien kann unmittelbar zur Prüfung der Theorie herangezogen werden. Auf diesem direkten Wege kann auch entschieden werden, ob  $W$  die Entropie ist.

## Zweiter Teil.

### Atomistische Struktur der Strahlung.

#### § 1. Strahlungsmenge.

Neben der Funktion  $W$ , die nur durch reversible Prozesse bestimmt wird, führen wir noch eine andere Zustandsgröße der Strahlung:

$$P = \frac{U}{\nu}$$

ein, die folgende Eigenschaften besitzt:

Bei adiabatischer reversibler Ausdehnung einer Strahlung ändert die zugeführte mechanische Energie die Schwingungszahl so, daß immer die Größe  $P$  erhalten bleibt. Aber auch bei einer irreversiblen Zerstreuung bleibt  $P$  konstant, da  $U$  und  $\nu$  nicht geändert werden. Dagegen kann  $P$  jedesmal geändert werden, sobald eine Emission oder Absorption der



Strahlung eintritt, insbesondere durch Anwesenheit eines kleinen absorbierenden Körpers, der zwar die Energie nicht wesentlich zu verändern vermag, wohl aber die Schwingungszahl. In dem Ausdruck für die Strahlungsenergie

$$U = \bar{\nu} \cdot P$$

stellt  $\bar{\nu}$  einen Intensitätsfaktor dar; der andere Faktor kann nur durch Strahlungszufuhr vermehrt werden.  $P$  spielt also die Rolle der Wärmekapazität eines idealen Gases oder auch einer Elektrizitätsmenge im Ausdruck für elektrische Energie. Diese Analogiebeziehung soll durch die Benennung von  $P$ -Strahlungsmenge gekennzeichnet werden.

Wir bemerken, daß der Kreisprozeß des § 1 mit einer veränderlichen Strahlungsmenge ausgeführt wurde, was natürlich für die Frage der Arbeitsfähigkeit der aus Strahlungsreservoirs entnommener Strahlung belanglos ist.

Führen wir den Kreisprozeß bei  $P = \text{Const.}$  durch, so kommt an die Stelle der „Isochrome“ bei konstantem Druck eine solche bei konstantem  $P$ . Wir haben dann

$$P = \frac{U}{\bar{\nu}} = \frac{3 p \cdot V}{\bar{\nu}} = \text{Const.},$$

$$p \cdot V = \frac{P}{3} \cdot \bar{\nu}$$

als charakteristische Gleichung der Strahlung.

Die „Isochrome“ ist jetzt eine Hyperbel

$$p \cdot V = \text{Const.}$$

Und der ganze Kreisprozeß ist dem Carnotschen vollkommen analog. Das Resultat:

$$\int_1^2 \frac{dL}{\bar{\nu}} = 0$$

wird ersichtlich nicht berührt.

Mit Hilfe von  $P$  können wir eine Hypothese aufstellen, die zur Definition 1 für  $\bar{\nu}$  führt.

Wir bestimmen nämlich für gemischtes Licht

$$P = \frac{U}{\bar{\nu}} = \frac{\int_0^\infty U_\nu d\nu}{\bar{\nu}}$$

und setzen

$$P = \int P_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{U_\nu}{\nu} d\nu,$$

daraus folgt:

$$\bar{\nu} = \frac{\int_0^\infty U_\nu d\nu}{\int_0^\infty \frac{U_\nu}{\nu} d\nu}.$$

Zur Definition 2 gelangen wir, indem wir die Entropie  $W$  für konstantes  $P$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} W_\nu &= \int_0^1 \frac{dL}{\nu} = \int_0^1 \left( \frac{dU}{\nu} + P \frac{dV}{\nu} \right) = \int_0^1 \left( P \frac{d\nu}{\nu} + \frac{P}{3} \frac{dV}{V} \right) \\ &= P \log \frac{\nu}{\nu_0} + \frac{P}{3} \log \frac{V}{V_0}. \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt die Entropie der Mischung

$$W = \int_0^\infty P_\nu d\nu \cdot \log \frac{\bar{\nu}}{\nu_0} + \frac{1}{3} \int_0^\infty P_\nu d\nu \cdot \log \frac{V}{V_0}$$

gleich der Summe der Entropien der Einzelfarben:

$$W = \int_0^\infty W_\nu d\nu = \int_0^\infty P_\nu \log \frac{\nu}{\nu_0} d\nu + \frac{1}{3} \int_0^\infty P_\nu \log \frac{V}{V_0} d\nu.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke bekommen wir:

$$\log \bar{\nu} = \frac{\int_0^\infty \frac{U_\nu}{\nu} \log \nu d\nu}{\int_0^\infty \frac{U_\nu}{\nu} d\nu}.$$

Die Definition 3 ist als die formell einfachste Mittelwertbildung hinzugefügt.

## § 2. Strahlungsquanten.

Seit dem Erscheinen des Aufsatzes von A. Einstein ist eine Reihe von Tatsachen entdeckt und diskutiert worden, die

ihre *einfachste* Erklärung in der atomistischen Auffassung der Strahlung, oder wenigstens ihrer Emission, finden. Diese Tatsachen sind:

1. Die kinetische Energie der photoelektrischen Elektronen ist unabhängig von der Intensität des Lichtes und zu gleicher Zeit eine kontinuierlich ansteigende Funktion der Schwingungszahl; es ist sogar wahrscheinlich, daß die Abhängigkeit linear ist.

2. Die Geschwindigkeit der durch Röntgenstrahlen ausgelösten Elektronen erreicht die Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen.

3. Die Lichtemission der Kanalstrahlen beginnt erst bei einer bestimmten Geschwindigkeit, die mit der Schwingungszahl im richtigen Verhältnis zu wachsen scheint.

4. Die Stokessche Regel bei der Fluoreszenz und Phosphoreszenz.

5. Die Existenz eines Maximums in der Energieverteilung der schwarzen Strahlung.

6. Der Verlauf der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen.

7. Der Erfolg, den die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Strahlungsprobleme unzweifelhaft aufzuweisen hat.

Gibt man aber einmal zu, daß die Strahlung atomistisch gebaut ist, so wird man schon aus Analogiegründen auf die Größe  $P = U/\bar{\nu}$  geführt, die atomisiert werden muß.

Setzen wir

$$P = N \cdot h,$$

so wird dadurch die Strahlungsmenge  $P$  in  $N$  *unzerstörbare* (bei Ausbreitung und Arbeitsleistung), *gleich große Strahlungsquanten* zerteilt, die in jeder Hinsicht den *Elektronen* (bei der Elektrizitätsmenge) und den *Atomen* (bei der Masse) äquivalent sind.

Die Energie  $\varepsilon$ , die ein Strahlungsquantum besitzt, ist für monochromatisches Licht

$$\varepsilon = h \nu,$$

wodurch das Strahlungsquantum  $h$  sich mit dem von M. Planck eingeführten Wirkungsquantum identisch erweist.

Von Energiequanten kann aber ebensowenig die Rede sein, wie von elektrischen oder thermischen Energiequanten, obgleich die Energie jedes Elektrons (bzw. jedes Moleküls) bei gegebenem Potential (bzw. Geschwindigkeit) eine ganz bestimmte und unteilbare ist.

Die dargelegte Auffassung stellt aber eine wesentliche Verallgemeinerung der Größe  $h$  dar, indem sie auf jeden elektromagnetischen Impuls anwendbar ist und nicht nur auf monochromatische Wellenzüge. Stellt man sich den Emissionsvorgang atomistisch vor, so wird man ihn als einen beliebig unregelmäßigen Impuls annehmen müssen, bei welchem die Fourierzerlegung keine physikalische Bedeutung haben kann. Es wäre natürlich absurd, für jedes Glied dieser Zerlegung ein besonderes Energiequantum zu fordern. Man wird im Gegenteil erwarten, daß jedem Impuls auch ein Strahlungsquantum entspricht, das dann durch eine bestimmte Zahl  $\nu$  charakterisiert werden muß. Und da erweist sich die Definition von  $\bar{\nu}$  als ganz natürlich.

Diese Verknüpfung der Form des Impulses (die durch eine Mittelwertbildung über die Glieder der Fourierreihe ausgedrückt wird) mit seiner Energie  $\varepsilon = h\bar{\nu}$ , führt auch zu einer neuen Auffassung von  $\bar{\nu}$ , als *derjenigen Energie, die ein Strahlungsquantum besitzt*:

$$\bar{\nu} = \frac{\varepsilon}{h}.$$

### § 3. Analogie mit einem Gase und Anwendung auf die schwarze Strahlung.

Die Analogie der Strahlung mit einem idealen Gase, die schon durch die charakteristische Gleichung ausgedrückt ist, geht noch tiefer durch die neue Auffassung von  $\bar{\nu}$ . Die Analogieelemente sind folgende:

Strahlung

Gas

$$W = \frac{1}{a} \times \text{Entropie } S,$$

$$P \quad , \quad \text{Masse } M,$$

$$h \quad , \quad \text{Masse eines Moleküls } \mu,$$

$$\bar{\nu} = a \times \text{Absolute Temperatur } T.$$

Was die Analogie zur kinetischen Energie des einzelnen Moleküls betrifft, so ist es wohl das einfachste, die Glieder der Fourierzerlegung den einzelnen Energiegebieten der Moleküle äquivalent zu setzen. Wir setzen so die Strahlung aus monochromatischen Strahlungsquanten  $h$  von der Energie  $h \cdot \nu$  zusammen; an die Stelle von  $\frac{1}{2} \nu^2$  tritt hier die Schwingungszahl.

Geht man aber in der atomistischen Auffassung der Strahlung soweit die Strahlungsquanten  $h$  nicht nur bei Emission und Absorption für unteilbar, bei Arbeitsleistung und Ausbreitung für unzerstörbar zu halten, sondern schreibt man jedem auch eine selbständige Existenz zu, so müssen wir jedes *Strahlungsquantum* als einen unregelmäßigen Impuls auffassen, der durch  $\bar{\nu}$  bestimmt wird. Den Gliedern der Fourierzerlegung werden wir dann keine physikalische Bedeutung beilegen, und diese Zerlegung im Gegensatz zu der Zerlegung in individuelle Strahlungsquanten als eine bloße mathematische Operation auffassen.

Es wäre sogar nicht ausgeschlossen, daß die Definition von  $\bar{\nu}$  nur für die einzelnen Quanten einen physikalischen Sinn besitzt, während die Beschreibung der Gesamtstrahlung durch ein mittleres  $\bar{\nu}$  sich als physikalisch wertlos erweist.

Die Anzahl der Strahlungsquanten bei einem Druck von einer Atmosphäre und einer mittleren Schwingungszahl  $\bar{\nu}$ , die einer Temperatur von  $273^\circ$  absolut entspricht, ist gleich der Loschmidschen Zahl für ein ideales Gas.

Gewisse wesentliche Vorteile bietet die hier skizzierte Analogie für die Frage nach der wahrscheinlichsten Energieverteilung.

Betrachten wir die Verteilung der Energie auf verschiedene Energiegebiete eines Gases, so finden wir bei gegebener Temperatur um so größere Geschwindigkeiten am stärksten vertreten, je kleiner die Masse ist. Im Grenzfall unendlich kleiner Moleküle geht die ganze Energie auf unendlich hohe Geschwindigkeiten über. Die Existenz eines Maximums in der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung ist also notwendig an die Endlichkeit der Atome geknüpft. Aus dem Geschwindigkeitsspektrum des Gases könnten wir auf seine atomistische

Struktur und aus der Lage des Maximums (oder des Mittelwertes) auf das Molekulargewicht schließen.

Ebenso werden wir durch die angegebene Analogie von der Existenz eines Maximums auf die Atomisierung der Strahlung und aus dem Mittelwert  $\bar{\nu}$  (Definition 1) auf das von Planck bestimmte Wirkungsquantum  $h$  geführt. Eine Paradoxie ist bei dieser Analogiebildung nicht zu erwarten, da die Verhältnisse bei einem idealen Gase ganz klar liegen. Auf diesem Wege ist vielleicht auch das Paradoxon zu erklären, das H. A. Lorentz zwischen der Hamiltonschen Form der elektromagnetischen Gleichungen und der Ungültigkeit der Rayleigh-Jeansschen Energieverteilung erblickt.

Die Analogie mit einem Gase geht aber nicht so weit, daß man die schwarze Strahlung als eine einfache Umschreibung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung erhält. Das Schwarzwerden der Strahlung kann nur durch Absorption und Emission bewirkt werden; dabei ist aber die Anzahl der Strahlungsquanten variabel. Außerdem ist durch die Temperatur schon der Druck der schwarzen Strahlung gegeben. Die schwarze Strahlung ist einem gesättigten Gase analog, das bis an die Grenzkurve, die hier mit einer Adiabate zusammenfällt, dem Gasgesetze folgt. Der warme Körper spielt für die Strahlung die Rolle eines kondensierten Systems. Zur Bestimmung der Energieverteilung muß man durch eine besondere physikalische Hypothese das Verhalten von  $P$  festlegen. Der allgemeine Typus des Gauss'schen Fehlergesetzes bleibt erhalten, speziell können durch passende Annahmen auch die Formeln von W. Wien, Rayleigh und M. Planck erhalten werden (letztere wenn wir eine Assoziation der Quanten zu Doppelquanten usw. annehmen). Doch scheint die schwarze Strahlung keinen direkten Weg zu den einfachen physikalischen Hypothesen zu bilden. Dieses ist vielmehr von den eingangs erwähnten Licktwirkungen zu erwarten.

#### Zusammenfassung.

1. Die Erfahrungstatsachen auf den Gebieten der Photoelektrizität, Photochemie, Lichtionisation, Fluoreszenz und Phosphoreszenz ließen sich durch die Eigenschaften der Strahlung erklären, wenn man die Wirksamkeit des Lichtes nicht durch

die schwarze Temperatur, sondern direkt durch die Schwingungszahl mißt.

2. Die Ausrechnung eines reversiblen Kreisprozesses mit monochromatischer Strahlung zeigt in der Tat, daß die Arbeitsfähigkeit der Strahlung durch die Schwingungszahl  $\nu$  bestimmt wird. Der Ausdruck für die einem System zugeführte Strahlungsenergie läßt sich in der Form darstellen

$$dL = \nu dW,$$

wo  $\nu$  als Intensitätsfaktor auftritt,  $W$  als eine neue Zustandsfunktion der Strahlung.

3. Die Größen  $\nu$  und  $W$  werden für gemischte Strahlung verallgemeinert durch Einführung eines Mittelwertes  $\bar{\nu}$ , für welchen drei verschiedene Definitionen angegeben wurden. Sobald die Mittelwertbildung an eine allgemeine Forderung geknüpft wird, läßt sich aus dem Verschiebungsgesetze zeigen, daß für *schwarze* Strahlung die verallgemeinerte Größe  $W$  mit der Entropie bis auf einen Zahlenfaktor identisch ist.

4. Das Verhalten der Funktion  $W$  bei irreversiblen Strahlungsvorgängen rechtfertigt die Annahme, daß  $W$  auch für nicht schwarze Strahlung der Entropie nicht nur analog, sondern mit derselben identisch ist. Die experimentellen Ergebnisse reichen nicht aus, diese Annahme zu beweisen, widerlegen sie aber auch nicht. Es bleibt die Möglichkeit offen, zu behaupten, daß die *Entropieänderung jeder Strahlung, durch*

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 \frac{dL}{\bar{\nu}}$$

*gebildet, auf einem beliebigen reversiblen Wege gemessen wird.*

5. Als *Strahlungsmenge* wurde eine Größe

$$P = \frac{U}{\bar{\nu}}$$

eingeführt, die bei Abwesenheit einer Emission oder Absorption erhalten bleibt.

Durch Teilung der Strahlungsmenge in gleiche Elemente werden die *Strahlungsquanten*  $h$  erhalten, deren Anzahl durch Arbeitsleistung und Zerstreuung der Strahlung nicht geändert werden kann.

6. Es wird auf eine Reihe von Erscheinungsgebieten hingewiesen, die für die Endlichkeit und Gleichheit der Strahlungsquanten sprechen, wenigstens bei Emission und Absorption.

Die Energie eines Strahlungsquantums ist der Zahl  $\bar{\nu}$  proportional. Dies führt zu einer neuen Auffassung von  $\bar{\nu}$ , als der Energie eines Strahlungsquantums.

7. Es wurde die weitgehende Analogie skizziert, die zwischen einer Strahlung und einem idealen Gase besteht und zur Diskussion über das Problem der wahrscheinlichsten Energieverteilung herangezogen.

8. Die Entscheidung über die Zulässigkeit der einzelnen Annahmen wird nicht von der Form der Energieverteilung erwartet, sondern von den quantitativen Schlüssen, die diese Annahmen für photochemische, photoelektrische und Lumineszenzerscheinungen liefern. Erst eine genauere Untersuchung dieser Erscheinungen wird über die Universalität der hier benutzten Gesetzmäßigkeiten Aufschluß geben können.

St. Petersburg, Physik. Laborat. des Polytechnikums.

(Eingegangen 24. Juli 1911.)



**4. Über scheinbaren Halleffekt bei hochfrequenten Wechselströmen und ein hierauf beruhendes empfindliches Nullinstrument; von Hermann Zahn.**

Von Hrn. Des Coudres<sup>1)</sup> ist eine Methode angegeben worden, den Halleffekt mittels eines Wechselstromes zu erzeugen, der hintereinander die Hallplatte und die felderregende Wicklung durchfließt; aus den Hallelektroden kann dann Gleichstrom entnommen werden. Ein wesentlicher Vorzug dieser Wechselstrommethode ist wohl der, daß dabei das mühsame Aufsuchen bzw. Herstellen äquipotentieller Punkte auf den Längsseiten der Platte entfällt, wodurch das Verfahren besonders vorteilhaft zur Untersuchung des Temperatureinflusses auf den Halleffekt wird; in dieser Richtung bewegten sich denn auch die bisherigen<sup>2)</sup> Anwendungen. Die dabei benutzten Wechselzahlen waren die üblichen technischen, nur Hr. Des Coudres hat durch einen Versuch mit 700 Wechseln pro Sekunde gezeigt, daß hierbei der Rotationskoeffizient von gleichem Betrage gefunden wird wie mit Gleichstrom. Ferner hatten ihm orientierende Versuche mit Teslaströmen<sup>3)</sup> von über einer Million Perioden in der Sekunde bei Wismut kräftige Halleffekte ergeben und gezeigt, daß ein „zeitliches Zurück bleiben der Hallischen Wirkung gegen das Feld nicht“ anzunehmen ist.

Bei diesen nicht näher beschriebenen Versuchen mit Teslaströmen erscheint meines Erachtens weniger die fehlende Trägheit des Halleffektes befremdlich, als vielmehr der Umstand, daß überhaupt ein kräftiger Effekt nachgewiesen werden konnte.

1) Th. Des Coudres, *Physik. Zeitschr.* 2. p. 586. 1901.

2) H. Rausch v. Traubenberg, *Ann. d. Phys.* 17. p. 78. 1905.  
W. Frey, *Dissert.* Leipzig. 1908.

3) *Anmerkung bei der Korrektur.* Wie Hr. Des Coudres mir auf Anfrage freundlichst mitteilte, hatte er hierbei in erster Linie auf den Nachweis und nicht auf die Größenordnung des Effektes Wert gelegt. Durch meine nachstehend beschriebenen Versuche werden seine mit langsameren Wechselströmen erhaltenen Resultate nicht wesentlich berührt (vgl. p. 573).

Denn bei dieser Periodenzahl müssen Feldspulen ohne Eisenkern verwendet worden sein, so daß die effektiven Feldstärken nur kleine waren; auch die effektiven Hallstromstärken können wohl keine sehr großen gewesen sein. Nun ist es Hr. Righi<sup>1)</sup> gelungen, bei Wismut das Zustandekommen des Halleffektes schon unter dem Einflusse des Erdfeldes nachzuweisen, so daß auch bei den Feldstärken in Teslaspulen der Effekt in meßbarer Größe zu erwarten ist. Da aber Hr. Des Coudres bei seinen Versuchen anscheinend starke Effekte erhalten hat, ohne daß eine besonders dünne Platte bzw. ein hochempfindliches Galvanometer angewendet wurde, so war bei Ausschluß etwaiger Fehlerquellen die Vermutung naheliegend, daß der Rotationskoeffizient bei höheren Wechselzahlen nicht mehr derselbe sei, wie in konstanten oder langsam wechselnden Feldern, sondern ein wesentlich höherer.

Diese Vermutung wurde scheinbar bestätigt, als ich die Versuche von Hr. Des Coudres mit Poulsonschwingungen wiederholte. Das Prinzip der Anordnung ist schematisch in Fig. 1 dargestellt. Hierin ist  $P$  die Poulsonlampe<sup>2)</sup>,  $C$  ein variabler Luftkondensator<sup>3)</sup> und  $L$  die Hauptselbstinduktion des Schwingungskreises. Zwischen  $L$  und  $P$  war eine weitere Spule eingeschaltet, in deren Innerem sich die Hallplatte  $H$  befand. Die praktische Ausführung gestaltete sich insofern etwas anders, als es sich vorteilhaft erwies, den Hallstrom durch die Platte gegenüber dem die Spule  $L'$  durchfließenden Feldstrom zu kommutieren. Um dies bewerkstelligen zu können, ohne jedesmal die Schwingungen zu unterbrechen, wurde zwischen  $L'$  und  $P$  eine weitere kleine Spule  $L''$  von wenigen Windungen gebracht, der die Hallplatte  $H$  unter Vorlegung eines vierpoligen Kommutators  $K$  in der aus Fig. 2 ersichtlichen Weise parallel geschaltet war. In den Zweig mit der Platte waren einige Windungen aus dickem Kupferdraht

1) A. Righi, Beibl. 7. p. 779. 1883.

2) Dieselbe war im Institut gebaut ähnlich der von Hr. Kiebitz angegebenen einfachen Form (Elektrotechn. Zeitschr. 30. p. 21. 1909); sie bewährte sich recht gut bei Versuchen, bei denen dem Schwingungskreise keine merkliche Energie entzogen wurde.

3) Bei der größten verwendeten Wellenlänge wurde ein Glimmerkondensator von 0,1 Mikrof. benutzt.

gelegt, die so abgeglichen wurden, daß im Amperemeter  $A'$  etwa die halbe Stromstärke des vom Amperemeter  $A$  angezeigten Feldstromes floß. Da der effektive Widerstand des Plattenzweiges sehr klein war, so bestand keine in Betracht

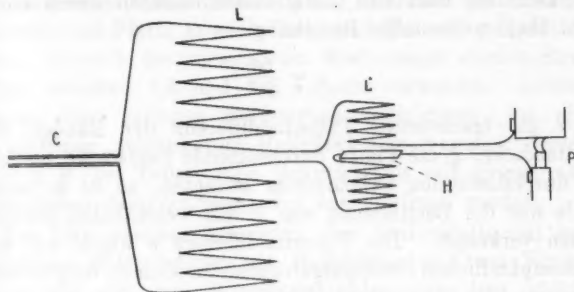


Fig. 1.

kommende Phasendifferenz zwischen dem Strom in  $H$  und in  $L'$ , somit auch keine zwischen dem Hallstrom und dem Feldstrom. Die auf eine Hartgummi- oder Glasscheibe gekittete Platte  $H$  wurde derart in der Mitte von  $L'$  befestigt,

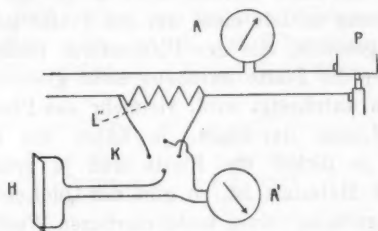


Fig. 2.

daß ihre Zuführungen keine Induktionsschleifen für die Kraftlinien von  $L'$  bildeten. Dies konnte daran erkannt werden, daß beim Kommutieren des Stromes in  $H$  der Ausschlag in  $A'$  der gleiche blieb, während etwaige Induktionsströme den Strom in der Abzweigung bei der einen Kommutatorstellung vergrößerten, bei der anderen verkleinerten. Da die untersuchten Metalle eine erhebliche thermoelektrische Kraft gegen Kupfer besaßen, so wäre es nicht ausgeschlossen, daß durch Induktions-

schleifen im Felde, welche die zum Galvanometer führenden Drähte bilden, Thermostrome entstünden. Tatsächlich trat kein merklicher Ausschlag auf, wenn nur die Feldspule, nicht auch die Platte, von einem Strome durchflossen wurde.

Definiert man den Rotationskoeffizienten durch die von Hrn. Hall aufgestellte Beziehung

$$(1) \quad \varrho = \frac{e d}{\S J},$$

wo  $e$  die transversale Potentialdifferenz der Ränder,  $d$  die Plattendicke,  $\S$  die Platte durchsetzende Feldstärke und  $J$  den sie durchfließenden Primärstrom bedeuten, so ist in unserem Falle nur die Bestimmung von  $\S$  mit wesentlichen Schwierigkeiten verknüpft. Die Potentialdifferenz  $e$  wurde mit einem hochempfindlichen Drehspulgalvanometer kleinen Widerstandes<sup>1)</sup> gemessen, die Stromstärke  $J$  mit einem Hartmann & Braunschen Hitzdrahtamperemeter Type *AWc*, dessen Angaben nach Untersuchungen<sup>2)</sup> im hiesigen Institut nahezu unabhängig von der Frequenz der Schwingungen sind. Über die umständliche und schwierige Bestimmung der Feldstärke soll, um den Zusammenhang nicht zu stören, in einer folgenden Mitteilung ausführlicher berichtet werden, hier möge nur erwähnt sein, daß die Messung mittels einer auf die Platte gelegten Induktionsschleife geschah, die der Plattenform tunlichst angepaßt war. Da aber die Platte durchaus nicht gleichförmig von Induktionslinien durchsetzt wird, vielmehr das Platteninnere um so weniger Linien durchläßt, je höher die Frequenz der Schwingung, je dicker die Platte und je größer das Leitvermögen des Materials ist, so gibt der Quotient „Induktionsfluß: Windungsfläche“ einen undefinierbaren Wert für die Feldstärke, dessen Verwendung in Gleichung (1) indessen dadurch berechtigt erscheint, daß die Verteilung der Hallpotentialdifferenz längs der Plattenbreite der Kraftlinienverteilung entsprechen muß. Nur bei den Versuchen mit einer Tellurplatte wurden wirklich definierte Feldstärken erhalten, indem das Feld durch die schlecht leitende Platte fast nicht beeinflußt wurde.

1) H. Zahn, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 31. p. 145. 1911.

2) W. Steinhaus, Physik. Zeitschr. 12. p. 657. 1911.

Der absolute Betrag der zur Verwendung gelangten Feldstärken war in den eisenfreien und einlagigen Spulen, die die Verwendung der Hochfrequenzströme bedingte, naturgemäß ein kleiner. In der Mitte der am häufigsten verwendeten Spule war ohne Anwesenheit einer Platte  $\mathfrak{H} = 1,61$  Gauss pro 1 Ampere Feldstrom, mit Platte je nach Dicke und Material entsprechend kleiner. Je nach der verwendeten Wellenlänge wurden Stromstärken zwischen 1,5 und 3,5 Ampere verwendet. Indessen genügten diese geringen Feldstärken vollkommen, um einen sehr kräftigen „scheinbaren“ Halleffekt hervorzurufen; derselbe konnte z. B. bei Tellur ohne Schwierigkeit mit einem mäßig empfindlichen Zeigergalvanometer nachgewiesen werden.

Zur Untersuchung gelangten eine Tellurplatte mit angeschmolzenen Platindrähten als Hallelektroden, zwei Wismutplatten, die eine mit Wismutelektroden aus dem gleichen Material, die andere mit angelöteten Kupferdrähten, drei Antimonplatten mit Kupferdrähten und eine mit Antimonelektroden, ferner je eine dünne Eisen- und Nickelplatte mit Elektroden aus dem Plattenmaterial.

Der beobachtete Effekt war weitaus am größten bei Tellur, dann folgte Wismut, Antimon, Eisen und Nickel, ganz entsprechend der Reihenfolge, die bei der üblichen Gleichstrommethode erhalten wird. Auch das Vorzeichen ergab sich identisch mit dem üblichen, d. h. bei einer Wismutplatte besaß

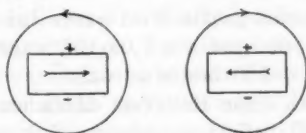


Fig. 3.

der in der Zeichnung obere Plattenrand positives Potential, wenn der Strom in der Spule  $L'$  bzw. in der Platte die in Fig. 3 angegebene Richtung hatte. Gleichsinnig hiermit verlief der Effekt bei Nickel, umgekehrt bei Tellur, Antimon, Eisen. Ferner ergab sich eine recht gute Proportionalität zwischen Galvanometerausschlag und Hallstromstärke bzw. Feldstromstärke, wobei letztere Größen gelegentlich im Verhältnis 1:4

variiert wurden; somit war  $\epsilon$  proportional  $J\tilde{S}$ , wie die Gleichung (1) verlangt. Es schien daher die Deutung der Erscheinung als Halleffekt zulässig zu sein; das befremdende und anscheinend neue war das starke Anwachsen des Koeffizienten  $\rho$  mit zunehmender Wechselzahl. Eine mit einer Antimonplatte ( $d = 0,050$  cm) angestellte Versuchsreihe veranschaulicht dies Verhalten in Tab. I.

Tabelle I.

$n$	$\epsilon$	$\frac{\rho}{\sqrt{n}}$	$n$	$\epsilon$	$\frac{\rho}{\sqrt{n}}$
0	+ 0,223		$6,01 \cdot 10^5$	169	0,21 <sub>7</sub>
$0,47 \cdot 10^5$	16,3	0,07 <sub>8</sub>	9,04 „	216	0,22 <sub>7</sub>
1,92 „	62,5	0,14 <sub>3</sub>	10,47 „	254	0,24 <sub>8</sub>
2,86 „	95,2	0,17 <sub>8</sub>	17,15 „	317	0,24 <sub>8</sub>

Die Bestimmung der Wechselzahl  $n$  erfolgte für Wellen kleiner als 2400 m mittels eines Hahнемannschen Wellenmessers<sup>1)</sup>, für längere wurde  $n$  aus der Thomsonschen Formel berechnet, was bei nicht zu kleiner Kapazität im Kreise auch bei Poulsonsschwingungen in erster Annäherung zulässig ist.<sup>2)</sup>

Der Koeffizient  $\rho$  wächst also mit zunehmender Wechselzahl, bei hohen Frequenzen anscheinend proportional  $\sqrt{n}$ . Bei allen untersuchten Platten wurde diese starke Zunahme beobachtet. Der absolut größte Wert wurde bei der Tellurplatte erhalten,  $\rho = + 25000$  bei  $n = 1,05 \cdot 10^6$ , während der Gleichstromwert zu  $\rho = + 500$  bestimmt war.

Es sind jedoch diese Halleffekt ähnlichen Erscheinungen nicht als wahrer Halleffekt aufzufassen, d. h. sie werden nicht hervorgerufen durch eine Ablenkung der Stromfäden durch das die Platte durchsetzende Feld. Das beweisen verschiedene

1) E. Nesper, Elektrotechn. Zeitschr. 28. p. 849. 1907. Wellenmesser, Drehplattenkondensatoren und andere Apparate wurden mir in entgegenkommendster Weise von Hrn. Kapitänleutnant Betz, Referenten für drahtlose Telegraphie am Kaiserl. Torpedo-Versuchskommando zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aussprechen möchte.

2) F. Kiebitz, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 9. p. 778. 1908.

Umstände. Zunächst stellte sich heraus, daß verschieden dimensionierte Platten desselben Materials ganz verschiedene Koeffizienten  $\varrho$  ergaben, und zwar wuchs  $\varrho$  mit der Plattendicke  $d$  und der Plattenbreite  $b$ , wie dies für drei Antimonplatten die kleine Tab. II zeigt.

Tabelle II.

	Platte 1	Platte 2	Platte 3	$n$
$b$	1,37 cm	1,36 cm	0,65 cm	
$d$	0,050	0,092	0,093	
$\varrho$	169	635	332	$0,60 \cdot 10^6$
$\varrho$	254	960	534	$1,05 \cdot 10^6$

Wenngleich die Messungen des magnetischen Induktionsflusses, zumal auf der kleinen Platte 3 sehr schwierig waren, so liegen doch die gefundenen Abweichungen von  $\varrho$  weit außerhalb der möglichen Beobachtungsfehler. Noch viel stärker macht sich der Einfluß der Dicke bei den untersuchten Eisen- und Nickelplatten geltend; ich fand z. B. bei Eisen bei  $n = 1,05 \cdot 10^6$  für  $d = 0,0021$  cm,

$$\varrho = + 0,26,$$

für  $d = 0,028$ ,

$$\varrho = + 7,4.$$

Zur Erklärung dieser Verschiedenheit ist es nicht zulässig, etwa eine ungleichförmige Verteilung der Stromlinien im Platteninneren heranzuziehen, in dem Sinne, daß eine andere als die gemessene Dicke in Gleichung (1) einzusetzen wäre, vielmehr ergibt eine Durchrechnung nach der Sommerfeld-Bethenodschen Formel<sup>1)</sup>, daß der Wechselstromwiderstand der Antimonplatten bei den verwendeten Wechselzahlen den Gleichstromwiderstand nur um wenige Prozente übertrifft.

Diese Abhängigkeit des Koeffizienten  $\varrho$  von den Plattendimensionen läßt eine Deutung des Effektes als auf Hallwirkung beruhend ausgeschlossen erscheinen. Die in Tab. II genannten

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 15. p. 688. 1904; J. Bethenod, Jahrb. d. drahtlos. Telegr. u. Teleph. 2. p. 400. 1908.



Antimonplatten waren mit Kupferelektroden versehen. Eine Platte aus gleichem Material mit 0,35 cm breiten Antimon-elektroden von 1,1 bzw. 0,9 cm Elektrodenlänge — es war die kreuzförmige Platte aus einem Stück heraus gearbeitet — ergab nun einen sehr viel kleineren scheinbaren Rotationskoeffizienten. Genau ließ sich derselbe nicht bestimmen, da bei dieser Platte die Galvanometerausschläge ständig wanderten, doch war  $\rho$  hier etwa 10—15 mal kleiner, als bei der in den Dimensionen am nächsten stehenden Antimonplatte 1. Dasselbe wurde beobachtet bei einer Wismutplatte mit Elektroden aus demselben Stück; die transversale Potentialdifferenz war viel kleiner und unregelmäßiger als sie mit zwei benachbarten Kupferelektroden gemessen wurde. Wurden aber die Kupferelektroden durch Wismutelektroden aus Hartmann & Braunschem Wismutdraht ersetzt, so trat die merkwürdige Erscheinung auf, daß das Vorzeichen des scheinbaren Halleffektes sich umkehrte, also  $\rho$  positiv wurde, dem Betrage nach aber etwa 4 mal kleiner als mit Kupferelektroden.

Diese Versuche machten es äußerst wahrscheinlich, daß die transversale Potentialdifferenz durch thermoelektrische Störungen hervorgerufen war. Dem entspricht auch der Umstand, daß Flüssigkeitsumgebung den Effekt stark verkleinerte, um so mehr, je dünner die Platte war; destilliertes Wasser wirkte stärker als Petroleum. Immerhin blieb auch in Flüssigkeitsumgebung die transversale Potentialdifferenz in wesentlich höherem Maße bestehen, als dem wahren Halleffekt entsprach. Wäre letzterer die Ursache gewesen, so hätte gleichfalls Flüssigkeitsumgebung den Galvanometerausschlag beeinflussen müssen, aber in entgegengesetztem Sinne; durch Beseitigung der galvanomagnetischen Temperaturdifferenz wäre der Ausschlag vergrößert worden.<sup>1)</sup>

Da die thermoelektrische Reihe der Reihenfolge der Metalle für den Halleffekt fast vollkommen parallel<sup>2)</sup> läuft, so wird verständlich, daß auch dieser scheinbare Halleffekt die gleiche Reihenfolge wie der wahre ergibt, außerdem das ent-

1) A. v. Ettingshausen, Wied. Ann. 31. p. 752. 1887; H. Zahn, Ann. d. Phys. 14. p. 905. 1904.

2) A. v. Ettingshausen u. W. Nernst, Wien. Ber. 94. p. 560. 1886; P. Drude, Ann. d. Phys. 3. p. 392. 1900.



gegensetzte Vorzeichen für Wismut und Nickel wie für Tellur, Antimon und Eisen; unerklärt bleibt vorläufig, warum es auch das richtige ist, d. h. warum eine derartig gerichtete Temperaturdifferenz der Plattenränder auftritt, die das richtige Vorzeichen vortäuscht. Daß tatsächlich eine solche Temperaturdifferenz zustande kam, welche kommutierte, wenn die Richtung des Plattenstromes gegen die des Feldstromes gewechselt wurde, konnte unschwer mit Thermoelementen nachgewiesen werden. Bei den Platten mit Elektroden aus dem Plattenmaterial war aus praktischen Gründen nicht möglich, die Elektrodenvorsprünge genügend lang zu machen, so daß die Stellen, wo die bifilaren Galvanometerzuführungen ansetzten, durch Wärmeleitung immerhin noch von der Temperaturdifferenz der Plattenränder beeinflußt wurden. Daß schließlich die Wismutplatte gegen den gepreßten Wismutdraht eine nicht geringe thermoelektrische Kraft von umgekehrtem Vorzeichen wie gegen Kupfer besaß, ist nicht auffallend.

Es wurde ferner untersucht, ob außer der Temperaturdifferenz der Plattenränder eine weitere Ursache für die transversale Potentialdifferenz in Betracht käme. Da besonders Wismut im Magnetfelde Widerstandsänderungen erfährt, so könnten diese, wenn sie im gleichen Takte wie die Stromschwankungen erfolgen, Veranlassung zu einer Gleichstromkomponente<sup>1)</sup> geben; diese würde Halleffektswirkungen vortäuschen, so wie sich die Hallelektroden nicht auf genau äquipotentiellen Punkten befänden. Dagegen spricht, daß dasselbe Vorzeichen und die angenähert gleiche Größe der transversalen Potentialdifferenz gefunden wurde, wie auch die Querelektroden gelagert sein mochten. Direkte Versuche an einer Wismut- und einer Antimonplatte ergaben zwar das Vorhandensein eines Gleichstromes in Längsrichtung der Platte, der aber viel zu schwach war, als daß die beobachteten Querströme hätten darauf zurückgeführt werden können. Da eine merkliche Widerstandsänderung<sup>2)</sup> in den schwachen Wechselfeldern meiner Versuche sich nicht nachweisen ließ, war vermutlich auch dieser Längsstrom thermoelektrischer Herkunft.

1) K. Lichtenegger, *Physik. Zeitschr.* 11. p. 507. 1910.

2) Mit Schwingungen untersucht.

Es erübrigt nun noch die Beantwortung der Frage, wodurch die beobachtete transversale Temperaturdifferenz der Plattenränder zustande kommt. Die Erklärung ist eine einfache; der Effekt wird bedingt durch die Wirbelströme, welche bei einer gegebenen Richtung des Plattenstromes gegen die des Spulenstromes in der oberen Plattenhälfte (Fig. 4) dem Plattenstrom gleich in der unteren entgegengerichtet sind. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß sich hieraus das beobachtete Vorzeichen des scheinbaren Halleffektes ergibt. Ferner läßt

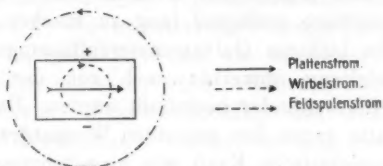


Fig. 4.

sich hierauf ein auf  $J$  ansprechender Stromzeiger gründen, der in gewissen Schaltungen ein recht empfindliches Nullinstrument darstellt.

Bei der in Fig. 2 skizzierten Anordnung ist der Plattenstrom gleichphasig mit dem Feldstrom, somit auch mit dem magnetischen Wechselfeld. Kann der Plattenwiderstand  $R$  als sehr klein angenommen werden, was bei nicht zu dünnen Platten stets zutrifft, so sind im Grenzfalle  $R = 0$  die Wirbelströme — wenigstens am Rande — um  $180^\circ$  gegen den Feldstrom verschoben, es tritt somit der in Fig. 4 gezeichnete Fall ein, daß der obere Plattenrand der wärmere wird. Besteht die Platte aus Wismut, die Hallelektroden aus Kupfer, so fließt der thermoelektrische Querstrom durch die Wismutplatte von unten nach oben, es ist somit in Übereinstimmung mit der Beobachtung der obere Rand der positive. Wurde eine Platte aus Kupferblech genommen, so war kein Querstrom bei Verwendung von Kupferelektroden zu konstatieren, wohl aber ein sehr kräftiger, wenn die Elektroden aus Konstantandraht bestanden; es war dann der untere Rand der positive, entsprechend der thermoelektrischen Stellung des Kupfers gegen Konstantan.

Man kann auch die Platte ersetzen durch einen Ring aus Kupferdraht mit zwei dicken Elektroden  $a$  und  $b$  aus Kupfer zur Zuführung des Stromes, und zwei Querelektroden  $c$  und  $d$  aus dünnem Konstantandraht, die man vorteilhaft durch Umhüllen mit Watte gegen äußere Temperaturstörungen schützt. Diese Vorrichtung hat gegen die Plattenform den Vorteil, daß man sie auch über eine enge schmale Feldspule schieben kann, was manchmal bequemer ist, als das Einbringen in eine Spule. Ist  $J$  die Stärke des hineingesandten,  $i$  die des im Ringe induzierten Stromes, so ist die Temperaturdifferenz zwischen  $c$  und  $d$  proportional  $[(J+i)^2 - (J-i)^2]$ , also  $\sim 4 J i$ . Da  $i \sim \frac{1}{R}$  ist, ersieht man, warum der scheinbare Halleffekt formal der Gleichung (1) genügt. Die sich ausbildende Temperaturdifferenz wird außer von dem Material der Platte, d. h. der spezifischen Wärme und dem Wärmeleitvermögen der Plattensubstanz abhängen von der Plattenform, und muß bei dickeren Platten bei gleicher Stromdichte größer sein als bei dünnen, entsprechend der geringeren Wärmeabgabe nach außen. Aber nicht nur in kalorischer, auch in elektrischer Beziehung sind Plattendimensionen und Plattenmaterial bestimmend für die Größe der entstehenden Temperaturdifferenz. Ist der Plattenwiderstand nicht sehr klein, so wird die Phasenverschiebung kleiner als  $180^\circ$ , im Grenzfalle  $R = \infty$  beträgt sie  $90^\circ$ . Es werde unter Zugrundelegung der Verhältnisse von Fig. 5 gesetzt

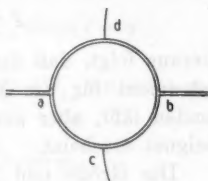


Fig. 5.

$$J = J_0 \sin \omega t; \quad i = i_0 \sin (\omega t - \chi),$$

wo  $\omega = n\pi$ , und  $\chi$  der Phasenwinkel ist, um den der im Ring induzierte Strom  $i$  gegen den Feldstrom, somit auch den in den Ring gesandten Strom  $J$  nachhinkt. Die pro Zeiteinheit in der oberen Ringhälfte entwickelte Wärmemenge ist

$$W_1 \sim (J_0 \sin \omega t + i_0 \sin (\omega t - \chi))^2,$$

die in der unteren

$$W_2 \sim (J_0 \sin \omega t - i_0 \sin (\omega t - \chi))^2$$

und die in der Zeit einer halben Periode entstehende Differenz ist

$$W_1 - W_2 \sim 4 J_0 i_0 \int_0^{\pi/2} \sin \omega t \sin(\omega t - \chi) dt.$$

Man kann daher die Temperaturdifferenz zwischen  $c$  und  $d$  setzen

$$(2) \quad \Delta T = \frac{2 C J_0 i_0}{\omega} \pi \cos \chi,$$

wo der Proportionalitätsfaktor  $C$  abhängt von den Dimensionen, dem Material und der Umgebung des Ringes.

Die Temperaturdifferenz zwischen  $c$  und  $d$  verschwindet für

$$\chi = 90^\circ \text{ bzw. } 270^\circ \text{ usw.},$$

sie wird ein Maximum für

$$\chi = 0^\circ \text{ bzw. } 180^\circ \text{ usw.}$$

Hieraus folgt, daß die Anordnung sich als empfindliches Nullinstrument für die Messung von Phasenverschiebungen verwenden läßt, aber auch für Einstellung auf Maximalausschläge geeignet erscheint.

Die Größe und Richtung der entstehenden Temperaturdifferenz muß sich ändern, wenn der in die Platte bzw. den Ring gesandte Strom eine Phasendifferenz gegen den Spulenstrom erhält; der Winkel  $\chi$  in Gleichung (2) ist naturgemäß abhängig von dieser Phasendifferenz  $\psi$ . In der Tat läßt sich das Vorzeichen des scheinbaren Halleffektes umkehren, wenn man in den Plattenzweig der Fig. 2 einen Kondensator geeigneter Größe einschaltet. Auch die Größe des entstehenden Galvanometerausschlages wird durch diesen Kondensator in erster Linie beeinflußt, und daß hier die Phasendifferenz das wesentlichste Moment ist, erhellt aus dem Umstand, daß unter geeigneten Bedingungen der Ausschlag wachsen kann, wenn die vom Amperemeter  $A'$  angezeigte Stromstärke abnimmt, wobei natürlich die durch  $A$  gemessene Feldstromstärke konstant zu halten ist. Die hier geltenden Beziehungen lassen sich leicht aus den für Wechselstromverzweigungen gültigen Regeln ableiten. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Stromverzweigung, wie sie in Fig. 6 gegeben ist. Der Strom  $J_3$ , der

die Feldspule  $F$  durchfließt, verteile sich in zwei Zweige 1 und 2, von denen 1 Selbstinduktion  $L_1$  und Widerstand  $R_1$  enthält, 2 Selbstinduktion  $L_2$ , Widerstand  $R_2$  und Kapazität  $C_2$ ; dieser Zweig enthalte außerdem den Ring  $\Re$ , der von den Kraftlinien

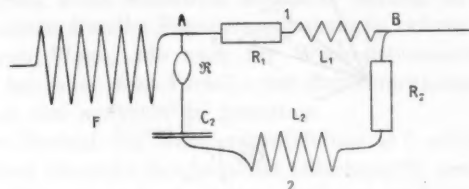


Fig. 6.

der Spule  $F$  durchsetzt wird. Ist  $E = E_0 \sin \omega t$  die Spannung zwischen den Verzweigungspunkten  $A$  und  $B$ , so ist bekanntlich

$$J_1 = \frac{E_0}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}} \sin(\omega t - \varphi_1) = J_{1,0} \sin(\omega t - \varphi_1),$$

$$J_2 = \frac{E_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L_2 - 1/\omega C_2)^2}} \sin(\omega t - \varphi_2) = J_{2,0} \sin(\omega t - \varphi_2),$$

wo

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1} \text{ und } J_{1,0} = \frac{E_0}{R_1} \cos \varphi_1$$

und

$$\tan \varphi_2 = \frac{\omega L_2 - 1/\omega C_2}{R_2}; \quad J_{2,0} = \frac{E_0}{R_2} \cos \varphi_2.$$

Will man die Phasendifferenz  $\chi$  zwischen dem Strome  $J_2$  und dem in  $\Re$  induzierten Strome  $i$  kennen, so genügt es, die Phasendifferenz  $\psi$  zwischen  $J_2$  und dem unverzweigten Strome  $J_3$  zu bestimmen, da zwischen  $i$  und  $J_3$  eine konstante Phasendifferenz besteht, die nur vom Selbstinduktionskoeffizienten und Widerstande des Ringes  $\Re$  abhängt; eine Rückwirkung von  $\Re$  auf  $F$  wird dabei vernachlässigt. Die Größe von  $\psi$  ergibt sich aus dem Vektordiagramm Fig. 7

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \psi) : \sin \psi = J_{2,0} : J_{1,0},$$

$$(3) \quad \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cot \psi = \frac{R_1 \cos \varphi_2}{R_2 \cos \varphi_1} + \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Besteht der Ring  $\Re$  aus sehr gut leitendem Metall, so daß sein Widerstand neben seiner Induktanz zu vernachlässigen

ist, so hinkt  $i$  um  $180^\circ$  hinter  $J_3$  nach, in diesem Falle ist  $\chi = 180 \pm \psi$ , je nachdem ob  $\varphi_2$  oder  $\varphi_1$  größer ist. Ist jedoch

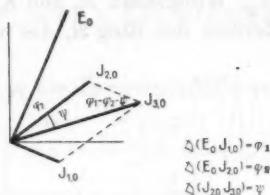


Fig. 7.

der Widerstand von  $\mathfrak{R}$  groß gegen dessen Induktanz, so ist  $\chi = 90 \pm \psi$ ; im allgemeinen Fall ist

$$(4) \quad \chi = 90 + \gamma \pm \psi, \text{ wo } \gamma = \arctan \frac{\omega L'}{R};$$

$L'$  ist der Selbstinduktionskoeffizient,  $R'$  der Widerstand des Ringes  $\mathfrak{R}$ .

Hält man den Spulenstrom  $J_3$  und damit  $i_0$  konstant und variiert, wie dies bei meinen zu beschreibenden Versuchen geschah, die Größen  $R_1, L_1, R_2, L_2, C_2$  so ist Gleichung (2) anzusetzen in der Form<sup>1)</sup>

$$(5) \quad \Delta T = \frac{2C}{\omega} i_0 J_{2,0} \cos \varphi_2 \cdot \pi \cdot \cos \chi,$$

wo  $\chi$  durch Gleichung (3) und Gleichung (4) bestimmt ist.

Auch wenn man statt Poulsonschwingungen wenig gedämpfte Kondensatorentladungen anwendet, kann man meistens die bei Wechselstromverzweigungen übliche Methode benutzen. Ich habe für zwei Spezialfälle, die im Experiment realisiert wurden, nämlich bei Widerstand  $R_1$  im Kreise 1, Widerstand  $R_2$  und Kapazität  $C_2$  im Kreise 2, sowie Widerstand  $R_1$  oder Selbstinduktion  $L_1$  in 1, Selbstinduktion  $L_2$  und Widerstand  $R_2$  in 2 die Stromverteilung berechnet, indem ich von der Differentialgleichung für die Entladung eines Kondensators ausging. Dies führt auf homogene lineare Differen-

1) Die Abhängigkeit von der Wechselzahl ist in dieser Form nicht enthalten. Vielmehr ist diese komplizierterer Natur, indem  $i_0$  nicht nur  $\sim J_{3,0} \cdot \omega$ , sondern auch umgekehrt proportional  $\sqrt{R' + \omega^2 L'^2}$  ist.

tialgleichungen dritter Ordnung für die Verzweigungsströme.<sup>1)</sup> Richtet man die Bedingungen entsprechend meiner Versuchsanordnung so ein, daß Periode und Dekrement der Schwingungen durch Selbstinduktion, Widerstand und Kapazität der Verzweigung nicht wesentlich beeinflußt werden, so berechnet sich praktisch dieselbe Phasenverschiebung  $\psi$  zwischen  $J_2$  und  $J_3$  auf diesem Wege, wie nach der Wechselstrommethode; die letztere hat aber den Vorteil, die Zahlenrechnungen außerordentlich viel einfacher zu gestalten.

Der Verlauf der Temperaturdifferenz  $\Delta T$  erfolgt nun in qualitativer Hinsicht durchaus der Gleichung (5) entsprechend, d. h. es läßt sich bei gegebenen elektrischen Konstanten der Stromverzweigungen stets voraussagen, in welcher Richtung der zu erwartende Galvanometerausschlag erfolgt. Aber auch in quantitativer Beziehung haben meine Beobachtungen die Gültigkeit der Gleichung (5) sehr annähernd erwiesen; daß dieselbe sich nicht streng erfüllt zeigte, dürfte in erster Linie in Unvollkommenheiten meiner Versuchsanordnung gelegen haben, die durch äußere Umstände bedingt waren.

Ein wesentlicher Mißstand bestand darin, daß die vorhandene Poulsonlampe schon bei geringen Energieentziehungen sehr inkonstante Schwingungen lieferte. Solche Energieentziehungen traten aber immer auf bei Verwendung eines Kondensators im Kreise 2, sobald sich die Periode der Eigenschwingung der Verzweigung derjenigen der Hauptschwingung näherte. Deshalb wurde  $R_1$  bzw.  $L_1$  sehr klein gemacht, d. h. die galvanische Koppelung möglichst lose, doch war damit der Mißstand verbunden, daß wenigstens  $L_1$ , wenn es klein war, nur ungenau gemessen werden konnte. Der variable Kondensator  $C_2$  war ein Glimmerkondensator der Lorenz-Aktiengesellschaft<sup>2)</sup>, dessen Kapazität in zunehmenden Intervallen von  $1 \cdot 10^3$  bis  $1,5 \cdot 10^6$  cm geändert werden konnte; es gelang bei der Größe der höheren Intervalle nur ausnahms-

1) Für den zweiten der genannten Fälle findet sich die Rechnung: L. Mandelstam, Ann. d. Phys. 8. p. 131. 1902.

2) Auch dieser war mir vom Torpedo-Versuchskommando freundlichst geliehen worden, konnte aber nur kurze Zeit daselbst entbehrt werden. Die von mir mit langsamen Wechselströmen gemessenen Kapazitäten desselben stimmten angenähert mit den Nennwerten des nur zu rohen Abstimmungen bestimmten Kondensators.

weise  $C_2$  durch Parallelschaltung der vorhandenen Luftkondensatoren in den vornehmlich interessierenden Gebieten stetig zu variieren.

Eine weitere Ungenauigkeit besteht darin, daß es schwer möglich ist, die Ohmschen Widerstände der Verbindungsdrähte in den Verzweigungen einigermaßen richtig anzusetzen, weshalb ihr Gleichstromwiderstand benutzt wurde. Diese möglichst kurzen Zwischenstücke waren verdrehte Litzen aus isolierten Drähten, immerhin kann ihr Wechselstromwert beträchtlich größer gewesen sein. Bei der gelegentlichen absichtlich Einschaltung größerer Widerstände aus dünnem Konstanstdraht fiel diese Fehlerquelle weg, doch werden dann die Minima der Kurve für  $\Delta T$ , wie dies die kombinierten Gleichungen (3), (4), (5) sowie die Beobachtungen ergeben, wesentlich unschärfer. Die hierbei verwendeten Widerstände waren nach dem Hahnemannschen Verfahren<sup>1)</sup> induktions- und kapazitätsfrei hergestellt.

Im folgenden sind einige Resultate zusammengestellt, die mit zwei verschiedenen Ringen  $\mathfrak{R}$  gewonnen wurden. Jeder der beiden war über ein Glasrohr von 3,92 cm äußerem Durchmesser gelegt, in das die Feldspule — 18 Windungen von 3,5 cm Durchmesser — gesteckt wurde. Der eine Ring bestand aus Kupferdraht von 0,017 cm Dicke, sein Selbstinduktionskoeffizient  $L'$  berechnete sich zu 160 cm.<sup>2)</sup> Der Widerstand zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  (Fig. 5) war im Nebenschluß zu einem Galvanometer zu  $0,02085 \Omega$  gemessen; somit war der Widerstand  $R'$  für einen den Ring durchfließenden Induktionsstrom, wenn man von Skineffekt absieht,  $4 \cdot 0,02085 = 0,0834 \Omega$ . Der Phasenwinkel, um den bei einer Schwingung von 587 m Wellenlänge der induzierte Strom der induzierten Spannung nacheilt, berechnet sich daraus zu  $\gamma = 81^\circ$  und nach Gleichung (4)  $\chi = 171^\circ \pm \psi$ .

1) W. Hahnemann, *Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph.* 2. p. 313. 1909.

2) Es gehen natürlich die Ungenauigkeiten, mit den  $L'$  und  $R'$  behaftet sind, in merklicher Weise in die Resultate über und tragen zu den Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten Werten bei. Es ist vielleicht zweifelhaft, ob die Anwendung der üblichen Formel zur Berechnung der Selbstinduktion bei so dünnen Drähten überhaupt berechtigt ist.



Der zweite Ring bestand aus 0,014 cm dickem Konstantandraht; für diesen war  $L' = 165$  cm,  $R' = 4,064 \Omega$ ; entsprechend wird für diesen Ring bei der gleichen Wellenlänge wie oben  $\chi = 97^\circ 30' \pm \psi$ , bei  $\lambda = 740$  m wird  $\chi = 96^\circ \pm \psi$ . Selbstverständlich waren bei diesem Ring die zum Galvanometer führenden Querelektroden dünne Kupferdrähte, während sie beim Kupferring aus Konstantandraht bestanden.

Es sollen nun einige Spezialfälle näher betrachtet werden.

*Fall I.*  $L_1 = 0$ ;  $\varphi_1 = 0$ ; der Widerstand  $R_1 = 0,493 \Omega$  bestand aus einem dünnen, nahezu bifilar angeordneten Konstantandraht;  $R_2$  und  $C_2$  konnten variiert werden, die Selbstinduktion des Zweiges 2 war direkt zu 2240 cm bestimmt worden. In diesem Falle wird

$$(6) \quad \tan \psi = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tan \varphi_2 = \frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{R_1 + R_2}.$$

*Versuche mit Konstantanring*,  $R_2 = 1,12 \Omega$ ; Wellenlänge 587 m;  $\omega = 3,22 \cdot 10^6$ . Damit  $\Delta T = 0$  wird, muß  $\chi = 90^\circ$  sein, somit

$$\psi = 97^\circ 30' \pm 90^\circ.$$

Hieraus ergibt sich  $C_2 = 44,4 \cdot 10^{-18} = 40000$  cm oder  $C_2 = 41,8 \cdot 10^{-18} = 37600$  cm, je nachdem man annimmt, daß  $J_1$  oder  $J_2$  dem anderen vorausseilt. Die Beobachtungen ergaben eine Umkehr des Galvanometerausschlags zwischen 35000 und 40000 cm Kapazität; eine genauere Bestimmung war hier nicht möglich, weil das große Intervall von 30000—40000 cm des Kondensators nur teilweise überbrückt werden konnte.

Bei einem zweiten Versuche war  $R_2$  durch Zuschalten von Widerstand  $R_2 = 16,22 \Omega$  gemacht worden; dann berechnet sich die Umkehrkapazität zu 55800 cm. Tatsächlich wurde eine Umkehr beobachtet bei 92000 cm; der Grund für die starke Abweichung liegt jedoch hier wie in allen Fällen, bei denen höhere Widerstände verwendet wurden, vermutlich in der Unsicherheit, welche die Berechnung von  $\gamma$  mit sich bringt. Bei kleinen Beträgen von  $(R_1 + R_2)$  kommt der Einfluß dieser Ungenauigkeit bei der Berechnung der Umkehrkapazität weniger in Betracht.

Setzt man  $C_2 = \infty$ , so berechnet sich der Grenzwiderstand

$R_2$ , bei dem noch eine Umkehr möglich ist, zu 54,2 Ohm; experimentell bestimmte sich dieser Grenzwiderstand zu etwa 20 Ohm. Während bei kleinen Widerständen die Minima anscheinend sehr scharf sind, verflachen sie außerordentlich mit zunehmendem  $R_2$ . Durch passende Wahl von  $R_2$  läßt sich leicht erreichen, daß die Umkehrkapazität nahe derjenigen ist, die die Eigenperiode der Verzweigung in Resonanz mit der Hauptschwingung bringt; in diesem Falle wachsen die Ausschläge zu beiden Seiten des Umkehrpunktes außerordentlich stark an.

*Versuche mit Kupferring.* Wurde bei den vorstehend beschriebenen Versuchen der Konstantanring durch den Kupfering ersetzt, so war überhaupt keine Umkehr des Galvanometerausschlages zu beobachten, statt dessen aber ein Maximum, das um so ausgeprägter war, je kleiner der eingeschaltete Widerstand. Daß hier ein dem Resonanzmaximum der Verzweigung benachbartes Maximum auftritt, ist unmittelbar ersichtlich; ersteres tritt auf für  $\omega L_2 = 1/\omega C_2$ , d. h. für  $\psi = 0$ , letzteres für  $\psi = 180^\circ - 171^\circ = 9^\circ$ . Die Maxima würden zusammenfallen, wenn der Widerstand des Kupferinges zu vernachlässigen wäre. Für  $R_2 = 0,1$  Ohm berechnet sich die Maximumkapazität zu 39 440 cm, während die Beobachtungen sie bei 36 000 cm vermuten ließen. Vergrößerung von  $R_2$  bewirkte nur eine Verflachung, aber keine merkliche Verschiebung des Maximums, was auch nach Gleichung (6) im vorliegenden Falle zu erwarten ist.

*Fall II.*  $R_1 = 0$ ;  $\varphi_1 = 90^\circ$ ;  $L_1 = 1667$  cm. Hier eilt  $J_2$  stets vor  $J_1$  voraus, es gilt hier

$$\cotg \psi = \frac{\omega L_1}{R_2} + \tan g \varphi_2 = \frac{\omega (L_1 + L_2) - 1/\omega C_2}{R_2}.$$

*Versuche mit Konstantanring.*  $\cotg \psi = \cotg (\chi - 97^\circ 30')$ . Dies ergibt für den Umkehrpunkt, wo  $\chi = 90^\circ$  sein soll,  $1/\omega C_2 = \omega (L_1 + L_2) + 7,60 R_2$ . Für  $R_2 = 1,12 \Omega$ ,  $L_2 = 2240$  cm berechnet sich  $C_2 = 14,7 \cdot 10^{-18} = 13200$  cm. Beobachtet wurde  $10000 < C_2 < 15000$  cm. Das Minimum wurde durch Einschalten von Widerstand sehr bald unscharf. Die dabei eintretende Verschiebung nach der Seite der abnehmenden Kapazität trug dazu wesentlich bei, indem dadurch  $J_2$  rasch abnahm.

*Versuche mit Kupferring.*  $\cotg \psi = \cotg (\chi - 171^\circ)$ . Dies liefert für den Umkehrpunkt

$$(7) \quad 1/\omega C_2 = \omega(L_1 + L_2) + 0,158 R_2.$$

Diese Anordnung gewährt offenbar die Möglichkeit, die Umkehr am schärfsten zu bestimmen, da hier bei einigermaßen kleinem  $R_2$ , wie es auch schon durch die Verwendung des Kupferinges bedingt ist, der Umkehrpunkt mit dem Resonanzpunkt der Verzweigung nahezu zusammenfällt.

Hier war  $R_2 = 0,10 \Omega$ , somit  $C_2 = 24,5 \cdot 10^{-18} = 22050 \text{ cm}$ . Die Umkehr wurde bei 22000 cm beobachtet, indem hier der Ausschlag bald rechts, bald links erfolgte; die Schwankungen hingen zusammen mit Unregelmäßigkeiten des Poulsonbogens, wodurch kleine Schwankungen der Wellenlänge bedingt waren. Bei einem zweiten Versuch war  $R_2 = 65 \text{ Ohm}$  gewählt, hieraus  $C_2 = 12200 \text{ cm}$ , während allerdings beobachtet wurde  $C_2 = 8000 \text{ cm}$ . Das Minimum wird um so schärfer, je kleiner der Widerstand  $R_2$  ist. Die beiden Äste rechts und links verlaufen verschieden steil, der nach Seite der wachsenden Kapazitäten flacher als der andere; doch ist bei kleinem  $R_2$  der Unterschied in der nächsten Nachbarschaft des Minimums unmerklich.

Es war nun von Interesse, zu untersuchen, wie genau sich der Nullpunkt mit dieser Methode überhaupt einstellen läßt. Da ich mich hierbei nach der Größe der vorhandenen stetig variablen Kondensatoren richten mußte, wurde hier nicht auf die Absolutwerte der elektrischen Konstanten der Verzweigungen geachtet, sondern dieselben wurden so ausprobiert, daß der Nullpunkt in den Kapazitätsbereich fiel, um den zwei parallel geschaltete Drehplattenkondensatoren von 3000 bzw. 500 cm die Gesamtkapazität zu ändern erlaubte. An Stelle des Ringes wurde wegen der höheren Thermokraft eine 3,80 cm lange, 2,50 cm breite und 0,057 cm dicke Platte aus reinem Wismut verwendet, die mit seitlichen Kupferelektroden versehen war; dieselbe befand sich im Innern der p. 555 erwähnten Spule.  $L_1$  war wieder = 1667 cm,  $L_2 = \text{ca. } 6600 \text{ cm}$ . Bei einer Wellenlänge von 760 m war die Nullkapazität  $C_2 = 20,58 \cdot 10^{-18}$ ; dabei konnte auf  $0,18 \cdot 10^{-18}$ , d. h. auf weniger als 1 Proz. genau eingestellt werden. Dies war durchaus nicht die Grenze, welche mittels der parallelgeschalteten Drehplattenkondensatoren er-

möglichst war; vielmehr hätten diese erlaubt, auf  $5,7 \cdot 10^{-21}$  direkt, und mittels Feinverstellung an dem einen noch genauer einzustellen. Die Ursache war vielmehr, wie schon erwähnt, der Umstand, daß sich mit der Bogenlänge die Wellenlänge des Schwingungskreises änderte. Da bei längeren Wellen die Konstanz der Lampe im allgemeinen eine bessere ist, so wurde der Versuch mit einer Wellenlänge  $\lambda = 908 \text{ m}$  wiederholt. Die Umkehrkapazität wurde bestimmt zu  $C_2 = 29,69 \cdot 10^{-18}$  mit einer Einstellungsgenauigkeit von ca.  $0,05 \cdot 10^{-18}$ , d. h. weniger als 2 Promille. Da die Galvanometerausschläge nach beiden Seiten bei Änderungen um den genannten Betrag über 100 mm betrugen, so muß die mögliche Einstellungsgenauigkeit mit dieser Methode bei Benutzung konstanter Wellenlängen, etwa durch Stoßerregung des Schwingungskreises, noch eine wesentlich höhere sein; leider war es mir in der Zeit, während der mir die nötigen Hilfsapparate zur Verfügung standen, nicht möglich, meine Versuche in dieser Richtung auszudehnen.

Ist der Widerstand  $R_2$  sehr klein, wie sicher hier bei der Wismutplatte, so müssen bei Verwendung verschiedener Wellenlängen die Umkehrkapazitäten nach Gleichung 7 sich verhalten, wie die Quadrate der Wellenlängen; im vorliegenden Falle

$$C_{908} : C_{760} = 29,69 : 20,58 = 1,443; \quad 908^2 : 760^2 = 1,427$$

wird diese Forderung hinreichend genau bestätigt.

*Fall III. Versuche ohne Kapazität.* Dieser Fall wird realisiert, wenn man den Kondensator kurz schließt, d. h.  $C_2 = \infty$  setzt. Ist  $L_1 = 0$ ,  $\varphi_1 = 0$ , so geht die Umkehrgleichung für Fall I für den Konstantanring über in

$$\operatorname{tg} (97^\circ 30' - 90^\circ) = \frac{\omega L_2}{(R_1 + R_2)}$$

oder

$$\omega L_2 = 0,132 \cdot (R_1 + R_2).$$

Es kommt hier nur das eine Vorzeichen in Frage, da  $J_2$  stets hinter  $J_1$  in der Phase nacheilt. Ein Versuch mit  $\lambda = 587 \text{ m}$ ,  $\omega = 3,22 \cdot 10^6$ ;  $R_1 = 0,493 \Omega$ ,  $L_1 = 2240 \text{ cm}$  lieferte als Umkehrwiderstand  $R_2 = 17,5 \text{ Ohm}$ , während 54,2 berechnet wurde. Bei einem zweiten Versuch wurde  $L_2$  durch Zuschalten einer Spule von 11300 cm vergrößert, als Umkehrwiderstand berechnete sich  $R_2 = 333 \text{ Ohm}$ ; beobachtet wurde

die Umkehr bei ca. 100 Ohm. Bei einigermaßen hohen Widerständen werden die Minima natürlich sehr flach. Die starken Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Werten sind zweifellos auf die Unsicherheit von  $\gamma$  zurückzuführen. Ermittelt man aus diesen Abweichungen  $\gamma$ , so ergibt der erste Versuch  $\gamma = 21^\circ 50'$ , der zweite  $23^\circ 33'$ , während die direkte Berechnung p. 569 für den Konstantanring  $\gamma = 7^\circ 30'$  ergeben hatte. (Vgl. hierzu die Anmerkung p. 568).

Die Zahl der möglichen Verzweigungsfälle ließe sich natürlich noch vermehren, doch dürften die behandelten genügen. Von diesen ist Fall II wohl der interessanteste, da er unter günstigen Bedingungen ermöglichen würde, Kapazitätsänderungen, event. auch kleine Selbstinduktionen mit großer Schärfe zu messen. Das Verfahren ist übrigens nicht nur an so hochfrequente Wechselströme gebunden, wie sie in dieser Mitteilung angegeben sind; auch mit gewöhnlichen technischen Wechselzahlen kann man die hier beschriebenen Erscheinungen<sup>1)</sup> nachweisen, wenn man entsprechend kräftige Felder anwendet. Bei einigen Versuchen, die ich anstellte, indem ich den Kupfering<sup>2)</sup> über einen unterteilten Eisenkern schob, der durch Wechselstrom magnetisiert wurde, gelang es mir ohne Schwierigkeiten, die Umkehr des Galvanometerausschlages zu erhalten. Zu den hier erforderlichen, natürlich sehr viel größeren Kapazitäten standen mir nur Papierkondensatoren zur Verfügung, die genauere Messungen unmöglich machten. Aber auch hiervon abgesehen, dürfte das Verfahren erst bei höheren Wechselzahlen, etwa solchen, wie sie mit den üblichen Hochfrequenzmaschinen erreichbar sind, vorteilhaft sein.

1) Daher kann die auftretende Temperaturdifferenz eine Fehlerquelle bei Untersuchung des Halleffekts nach der Des Coudresschen Methode bilden, die aber nach Tab. I mit abnehmender Wechselzahl immer kleiner wird und daher bei geeigneten Elektroden und eventuell durch Anwendung von Flüssigkeitsbädern ganz zu vermeiden ist.

2) Der Konstantanring eignet sich bei den geringen Wechselzahlen nicht dazu; da es schwer möglich, die Querelektroden  $c$  und  $d$  an genau äquipotentielle Punkte zu bringen, besteht zwischen ihnen eine Wechselspannungsdifferenz, die die Galvanometereinstellung unscharf macht. Beim Kupfering wird diese Störung wegen des kleinen Widerstandes unmerklich.

## Zusammenfassung.

Es wurde gezeigt, daß Metallplatten, die von hochfrequenten Wechselströmen durchflossen sind, in gleichphasigen magnetischen Wechselfeldern Anlaß zu Erscheinungen geben können, die in qualitativer Hinsicht vollkommen dem Halleffekt entsprechen, in quantitativer jedoch viel zu kräftig sind. Es gelang eine Erklärung für diese Erscheinung in den auftretenden Induktionsströmen zu finden, die in Verbindung mit dem Plattenstrom eine Temperaturdifferenz der Plattenränder und dadurch bei Vorhandensein geeigneter Elektroden thermoelektrische Ströme bewirken. Durch geeignet erteilte Phasenverschiebungen zwischen Platten- und Induktionsströmen ist es möglich, auf ein scharfes Verschwinden der Temperaturdifferenz einzustellen, und dadurch ein einfaches und empfindliches Nullinstrument zu gewinnen, das für manche Messungen mit Hochfrequenzströmen geeignet sein dürfte.

Kiel, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 12. Juli 1911.)

**5. Die thermoelektrischen Kräfte  
beim Übergang vom festen zum flüssigen  
Aggregatzustande;  
von Paul Cermak u. Hans Schmidt.**

Die Herren J. Koenigsberger und J. Weiss haben in ihrer Arbeit: Über die thermoelektrischen Effekte usw.<sup>1)</sup> die Vermutung ausgesprochen, daß die „Thermokraft“, d. i. die thermoelektromotorische Kraft für 1° Temperaturdifferenz beim Übergang vom festen zum flüssigen Aggregatzustande irgend eine sprunghafte Änderung erleide. Sie finden von 217—255° C. für  $dE/dT$  eine Zunahme von 8,4 Mikrovolt, während nach Jaeger und Diesselhorst<sup>2)</sup> nur 4,6 Mikrovolt zu erwarten seien und ebensoviel nach Reichardt und Noll.<sup>3)</sup> Da die Verfasser nur drei Versuche anführen, die die Vermutung bestätigen sollen, und da der eine von uns früher Messungen über den gleichen Gegenstand gemacht hat, die zu anderen Ergebnissen führten<sup>4)</sup>, so schien uns eine neuerliche Überprüfung nötig. Es war damals nur der Gang der thermoelektrischen Kräfte ober- und unterhalb des Schmelzpunktes bestimmt worden, während wir jetzt unser Augenmerk hauptsächlich auf die Vorgänge beim Schmelzen und Festwerden selbst richteten.

Wir bedienten uns dazu einer Kompensationsmethode. Das Metall — reines Blei von Merck, reines Zinn von Kahlbaum — wurde stückweise in eine etwa 70 cm lange Hartglasröhre (8 mm lichte Weite) mit aufgebogenen Enden gebracht und darin zu einem zusammenhängenden Stücke ver-

1) J. Koenigsberger u. J. Weiss, Ann. d. Phys. **35**. p. 1. 1911.

2) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Abhandl. d. Physikalisch-Technischen Reichsanstalt **3**. p. 269. 1900.

3) Vgl. K. Baedeker, Die elektr. Erscheinungen in metallischen Leitern. 1910. p. 66.

4) P. Cermak, Ann. d. Phys. **26**. p. 523. 1908.



schmolzen, so daß über dem Metalle in der Röhre noch genügend Raum blieb, um durch einen ständigen, langsamen Wasserstoffstrom eine Oxydation zu verhindern. An den aufgebogenen Enden tauchten in das Metall 1 mm dicke Konstantan- bzw. Eisendrähte und außerdem je ein Thermoelement Eisen-Konstantan. Wir maßen so die Temperaturen im Metalle an den Berührungsstellen. Die Drähte wurden natürlich voneinander durch Haarröhrchen isoliert ins Freie geführt. An einem der aufgebogenen Enden war eine Glasröhre von 40 cm Länge angesetzt, durch die der Wasserstoff eingeführt wurde. Jedes der beiden Enden der Metallstücke befand sich in einem gesonderten elektrischen Ofen, jeder Ofen wurde durch eine gesonderte Batterie geheizt. Von zwei Zellen einer dritten Batterie ging ein Strom durch ein Siemenssches Milliampereometer und Regulierwiderstände zu einem  $\frac{1}{99}$  Ohm und von da zurück. An den Enden dieses  $\frac{1}{99}$  Ohm lag andererseits das vom untersuchten Metall und Konstantan bzw. Eisen gebildete Thermoelement und in diesem Kreise befand sich das als Nullinstrument dienende Drehspulengalvanometer hoher Empfindlichkeit.

Wurde der Strom im Akkumulatorenkreise bis zur Stromlosigkeit des Spiegelgalvanometers reguliert, so konnte in bekannter Weise die resultierende thermoelektrische Spannung als  $i \cdot 0,0101$  gefunden werden. Die Temperaturmessung geschah mit den oben erwähnten Thermoelementen aus Eisen-Konstantan, die durch eine Wippe nach Bedarf mit einem Siemensschen Millivoltmeter verbunden werden konnten.

Am liebsten hätten wir die Thermokräfte nur für ganz kleine Temperaturdifferenzen der Berührungsstellen gemessen und daraus immer das jeweilige  $dE/dT$  (die Thermokraft für  $1^\circ \text{C.}$ ) berechnet. Doch stellte sich bei Vorversuchen heraus, daß dann wegen der geringen Stärke des Kompensationsstromes die Messung mit den uns zu Gebote stehenden Instrumenten zu ungenau ausfiel. Wir mußten uns deshalb entschließen, die eine der Berührungsstellen immer etwa  $60-70^\circ \text{C.}$  unter dem Schmelzpunkte des betreffenden Metalles zu halten und die Temperatur des anderen Ofens nach Bedarf zu verändern. So konnten wir einerseits gleich bei der Messung  $E/\Delta T$  (d. i. die gesamte Thermokraft dividiert durch die gesamte



Temperaturdifferenz der Berührungstellen) bestimmen, wobei sich ja auch eine etwa vorhandene sprunghafte Änderung gezeigt hätte, andererseits konnten wir nachträglich aus der erhaltenen Kurve für die thermoelektromotorische Kraft durch Interpolation  $dE/dT$  für ein Intervall von je  $10^\circ$  berechnen. Beide Rechnungsweisen finden sich in den später folgenden Tabellen durchgeführt.

Der Gang der Messungen war nun etwa der folgende. Der Ofen, der die kältere der Berührungstellen enthielt, wurde auf eine konstant bleibende Temperatur angeheizt, die dann meistens während mehrerer Stunden höchstens um  $2-3^\circ$  schwankte. Dann wurde die Temperatur des zweiten Ofens ganz langsam erhöht. Die entstehende Thermokraft wurde nun ungefähr kompensiert, so daß sich der Lichtzeiger des Spiegelgalvanometers bei zunehmender Erwärmung langsam gegen die Nullage hin bewegte. Der eine von uns beobachtete diesen Zeiger, und wenn er die Nullage erreichte, las der andere im gleichen Augenblicke die zugehörige Temperatur der heißen Berührungsstelle ab. Zwischen je zwei Messungen wurde die Konstanz der Temperatur der anderen Berührungsstelle kontrolliert und auch die Temperatur der äußeren Lötstellen der Thermoelemente festgestellt. Das Wandern des Lichtzeigers geschah natürlich sehr langsam. Bei einigen Beobachtungen wurde auch die Zeit notiert. War der Ofen etwa  $60^\circ$  über dem Schmelzpunkte, so wurde der Heizstrom von nun an verringert, und die Beobachtung geschah nun bei fallenden Temperaturen.

Dabei stellte sich heraus, daß trotz dem langsamen Anwärmen die Temperaturzunahme nicht so regelmäßig erfolgte wie die Abkühlung. Deshalb sind im folgenden nur Beobachtungsreihen bei fallenden Temperaturen gegeben. Aber auch bei Messungen mit fallenden Temperaturen ist ein wichtiger Umstand zu berücksichtigen. Wir beobachteten nämlich stets bei der langsamen Abkühlung des Metalles eine Unterkühlungserscheinung. Das Metall kühlte sich bis etwa  $4^\circ$  unter seinen Schmelzpunkt regelmäßig ab, dann stieg die Temperatur plötzlich zum Schmelzpunkte, blieb nun längere Zeit konstant, bis jedenfalls alles Metall fest geworden war, um dann von neuem erst rascher (infolge der vorausgeeilten Abkühlung des

Ofens), dann langsamer weiter zu sinken. Da uns dieser Umstand von Belang erscheint und jedenfalls bei solchen Beobachtungen immer berücksichtigt werden muß, möchten wir dazu ein zahlenmäßiges Beispiel anführen.

Bei diesem Versuche wurde nur der eine Ofen geheizt (und zwar in diesem Falle gleich mit höchster Stromstärke, so daß hier die Temperatur schneller zunahm als bei allen folgenden Versuchen). Das Anwachsen der Temperatur mit der Zeit wurde festgestellt und der gleiche Versuch wiederholt, nachdem durch Ausschalten des Heizstromes der Ofen zur Abkühlung sich selbst überlassen worden war. Die folgenden Zahlen und Kurven zeigen die Ergebnisse.

Tabelle 1.

Erwärmung		Abkühlung	
Zeit	Temperatur	Zeit	Temperatur
1'	138,5	0	277,8
6	177	5'	262,1
11	203,9	10	244,5
13	212,9	11 30"	238,4
15	221,7	13 7	233,1
16	225,3	13 18	232
16 40"	228,8	13 38	231,3
16 46	229,5	13 58	230,3
17 14	230,4	14 10	229,4
18	231,4	14 31	228,7
18 31	232	14 41	232
18 54	232	14 59	232
19 40	232	15 30	232
21 18	232,1	16 15	232
22 17	232,8	17 30	232
22 36	232,8	18	232
23 31	233,2	19	232
25 11	234	20 5	232
25 26	234,8	20 52	231,3
25 32	235,8	21 43	230,4
25 38	236,6	22 27	229,4
27 10	247,3	22 53	228,7
31	265,6	23 22	225,2
36	277,9	23 40	220,8
		24 3	216,4
		24 27	212,1
		25	207,3
		25 35	203,3
		26 18	198,8
		42	152,2
		51	133,7

Man sieht an diesen Zahlen den vorhin dargestellten Verlauf von Erwärmung und Abkühlung.

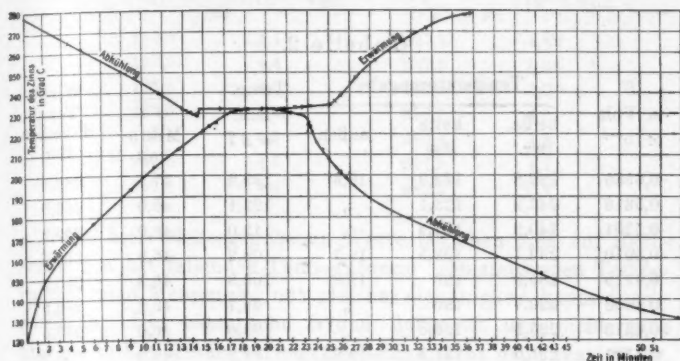


Fig. 1.

Nachdem wir somit gezeigt haben, welche Umstände bei derartigen fortlaufenden Untersuchungen der Abhängigkeit der Thermokräfte von der Temperatur zu beobachten sind, wollen wir nunmehr unsere Ergebnisse anführen.

#### Zinn-Konstanten.

Die Tab. 2 und 3 und die Fig. 2 bringen die Ergebnisse, die wir mit Zinn-Konstanten erhalten haben. Dabei sind in diesen wie in den meisten folgenden entsprechenden Tabellen verzeichnet: in der ersten Spalte die gesamten thermoelektromotorischen Kräfte, in der zweiten und dritten die Temperaturangaben der Thermoelemente für die heiße und kalte Berührungsstelle, in der vierten die Außentemperaturen, in der fünften die Temperaturdifferenzen zwischen den Berührungsstellen, in der sechsten das oben erwähnte Verhältnis von gesamter Thermokraft zur Temperaturdifferenz und in der siebenten die dazu gehörigen wirklichen Temperaturen der heißen Berührungsstelle. Die aus diesen Werten durch Interpolation von  $E$  berechneten tatsächlichen Werte von  $dE/dT$  für Intervalle von je  $10^\circ$  finden sich in der kleinen Tab. 3. Zu diesem Zwecke wurde der Gang der Kurve für die gesamte thermoelektrische Kraft auf einem sehr großen Blatte Milli-

meterpapiers eingetragen und aus der so erhaltenen Kurve wurde der Zuwachs dieser Kraft von 10 zu 10° abgelesen.

Tabelle 2.

$E$ in Volt $\times 10^{-3}$	Temperaturangabe			Temp.- Diff. $= \Delta T$	$\frac{E}{\Delta T}$ Mikro- volt	Wirkl. Temp. d. heißen Ber.
	heiße Ber.	kalte Ber.	außen			
0,6585	262,8	122,9	19,6	139,9	47,1	282,4
0,5616	247,2	125,1	„	122,1	46,0	266,8
0,5201	240,2	127,2	„	113,0	46,0	259,8
0,5010	236,7	128,5	19,7	108,2	46,3	256,4
0,4919	235,3	129	19,8	106,3	46,3	255,1
0,4606	229,7	130	„	99,7	46,2	249,5
0,4373	225,8	130,8	„	95,0	46,0	245,6
0,4121	221,0	131,5	19,85	89,5	46,0	240,85
0,3888	217,0	131,7	19,9	85,3	45,7	236,9
0,3686	213,0	„	„	81,3	45,3	232,9
0,3606	212,2	131,8	19,95	80,4	44,8	232,15
0,3565	211	131,9	20,0	79,1	45,1	231
0,3535	210,4	132,0	20,05	78,4	45,1	230,45
0,3596	211,9	132,1	20,1	79,8	45,05	232,0
0,3606	211,6	132,0	20,15	79,6	45,3	231,75
0,3555	210,4	131,9	20,2	78,5	45,3	230,6
0,3262	204,8	131,8	20,27	73,0	44,7	225,07
0,305	198,5	131,7	20,34	67,8	44,9	219,84
0,2838	195	„	20,4	63,3	44,8	215,4
0,2505	188,2	„	20,5	56,5	44,3	208,7
0,1717	170,7	„	20,6	39,0	44,0	191,3

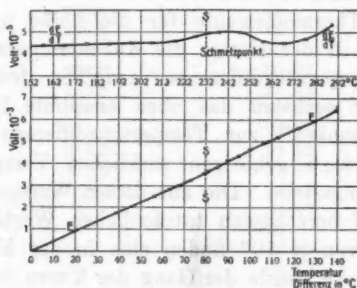


Fig. 2.

Tabelle 3.

° C.	$\frac{dE}{dt} \cdot 10^{-8}$ Volt	° C.	$\frac{dE}{dt} \cdot 10^{-8}$ Volt
157,5	4,4	227,5	4,82
167,5	4,4	237,5	5,08
177,5	4,45	247,5	5,0
187,5	4,45	257,5	4,6
197,5	4,5	267,5	4,5
207,5	4,5	277,5	4,7
217,5	4,6	287,5	5,2

Die hier wiedergegebenen Werte beziehen sich auf Beobachtungen bei fallenden Temperaturen. Bei steigenden Temperaturen sind Messungen mit gleicher Genauigkeit kaum durchzuführen. Der eigentliche Grund dafür ist uns nicht ganz klar. Die Erwärmung erfolgt vielleicht nicht ganz regelmäßig. Die Wärmezufuhr geschieht ja nach der Mitte des Ofens zu. Die Wärmemengen müssen durch das Glas an das Zinn abgegeben werden. Außerdem ist der freilich ganz schwache Wasserstoffstrom sicherlich ein ständig wärmeableitender Faktor. Man hat also in diesem Falle eine Wärmezufuhr und eine Wärmeabführung. Wenn beide eine vergleichbare Größenordnung haben, so fällt bei der Differenz beider Wirkungen irgend eine Ungleichmäßigkeit stark ins Gewicht. Bei fallenden Temperaturen aber haben wir zwei abkühlende Faktoren und eine kleine Unregelmäßigkeit wird weniger ausschlaggebend sein. Infolgedessen ist denkbar, daß wir bei steigenden Temperaturen keinen so regelmäßigen Verlauf des Temperaturanstiegens finden konnten, als daß wir diese Beobachtungen zu thermoelektrischen Auswertungen hätten brauchen können. Auch ist es durchaus nicht ausgeschlossen, daß die von physikalisch-chemischer Seite festgestellte starke Okklusion von Gasen, die beim Schmelzpunkte stattfindet, plötzlicher und unregelmäßiger erfolgt, als die Abgabe der Gase beim Festwerden der Metalle.

Man sieht aus den Tabellen und aus der zugehörigen Kurvendarstellung, daß die gesamte thermoelektrische Kraft sicherlich *keinen Sprung* erleidet. Man sieht auch, daß beim Eintreten der Unterkühlung die elektromotorische Kraft entsprechend weiter sinkt und bei der plötzlichen Temperatur-

erhöhung bis zum Schmelzpunkt ( $232^{\circ}\text{C.}$ ) auf den zugehörigen Wert wieder anwächst, um dann bei weiterem Sinken der Temperatur ganz regelmäßig weiter abzunehmen. In der Kurve ist nicht  $E/AT$ , sondern  $dE/dT$  dargestellt. Daran sieht man eine durchaus stetige Änderung dieser Größe. Es wächst  $dE/dT$  zunächst ganz langsam an. Schon vor dem Schmelzpunkte wird das Anwachsen ein stärkeres bis zu einem Maximum bei ca.  $240^{\circ}\text{C.}$ , dann sinkt es bis  $270^{\circ}$ , wo es den Wert 45 Mikrovolt noch einmal erreicht, um dann wieder langsam weiter zu steigen. Der Verlauf von  $dE/dT$ , der bei jedesmaligem Wiederholen des Versuches in gleicher Weise auftrat, zeigt jedenfalls, daß beim Schmelzpunkte keine sprunghafte Änderung des Ausdruckses statthat, und die mehrfache, aber stetige Änderung des Verlaufes von  $dE/dT$  läßt es nicht zu, daß man wie die Herren Koenigsberger und Weiss aus der Beobachtung zweier Punkte auf sprunghafte Änderung schließt.

#### Zinn-Eisen.

Einer Anregung der Herren Koenigsberger und Weiss<sup>1)</sup> folgend haben wir sodann die Kombination Zinn-Eisen untersucht. Die gewonnenen Ergebnisse sind in den Tab. 4 und 5 und in Fig. 3 enthalten.

Tabelle 4.

$E$ in Milli- volt	Temperaturangabe			Diff.	$\frac{E}{AT}$ · $10^{-7}$ Volt	Temp. d. heißen Ber- Stelle
	heiß	kalt	außen			
1,023	309,3	119,6	24,4	189,7	53,9	333,7
1,017	284,7	119,6	24,4	165,1	61,6	309,1
0,995	275,9	119,6	„	156,3	64,3	300,3
0,9962	271,2	119,4	„	151,8	65,8	295,6
0,9757	260,5	„	„	141,1	69,2	284,9
0,9519	251,7	119,3	„	132,4	71,9	276,1
0,914	239,7	119,2	„	120,5	75,9	264,1
0,8959	233	119,1	„	113,9	78,7	257,4
0,8534	223	119,0	„	104	82	247,4
0,8862	219	118,9	„	100,1	83,5	243,4
0,8261	216,8	118,8	„	98	84,3	241,2
0,8211	215,8	118,7	24,3	96,6	85,0	239,6

1) J. Koenigsberger u. J. Weiss, l. c. p. 20.

Tabelle 4 (Fortsetzung).

$E$ in Milli- volt	Temperaturangabe			Diff.	$\frac{E}{\Delta T}$	Temp. d. heißen Ber- Stelle
	heiß	kalt	außen		$\cdot 10^{-7}$ Volt	
0,8145	213,1	118,6	24,3	94,5	86,2	237,4
0,800	212	118,5	"	93,5	86,4	236,3
0,7999	210,2	118,4	"	91,8	87,1	234,5
0,7908	207,9	118,2	"	89,7	88,4	232,2
0,7817	206	118,1	24,2	87,9	88,9	230,2
0,7706	203,6	118,0	"	85,6	90,0	227,8
0,7929	207,8	117,9	"	89,9	88,2	232
"	"	"	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"	"
"	"	"	"	"	"	"
0,7817	205,6	117,7	24,1	87,9	89,4	229,7
0,7686	203,5	117,3	"	85,2	90,3	227,6
0,7110	196	"	24,0	78,7	90,4	220
0,6262	185,7	"	"	68,4	91,6	209,7
0,5938	181,1	"	"	63,8	92,6	"
0,5434	175,7	"	"	58,4	92,6	199,7
0,4565	163,8	"	"	46,5	98,2	187,8
0,4262	160,2	"	"	42,9	99,4	184,2
0,3838	155,4	"	"	38,1	101,0	179,4
0,3414	150,7	"	"	33,4	102,2	174,7
0,2793	144,2	"	"	26,9	104,2	168,2
0,1990	135,1	"	23,9	17,8	111,8	159,0
0,1293	128,2	"	"	10,9	117,9	152,1

Tabelle 5.

$^{\circ}\text{C.}$	$\frac{dE}{dT} \cdot 10^{-6}$ Volt	$^{\circ}\text{C.}$	$\frac{dE}{dT} \cdot 10^{-6}$ Volt
147	1,15	247	0,41
157	1,01	257	0,36
167	0,93	267	0,35
177	0,89	277	0,27
187	0,84	287	0,19
197	0,82	297	0,16
207	0,82	307	0,11
217	0,69	317	0,06
227	0,60	327	0,02
237	0,44		

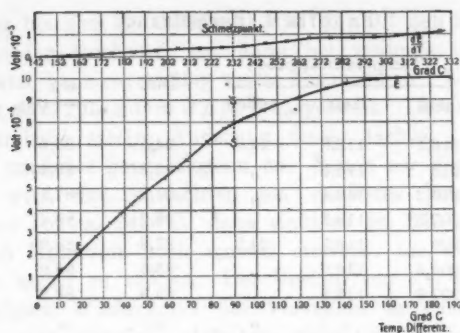


Fig. 8.

Diese Tabellen zeigen zunächst einmal, daß die gesamte Thermokraft fast zehnmal kleiner ist als bei Zinn-Konstantan. Natürlich sind dann auch  $E/\Delta T$  und  $dE/dT$  entsprechend kleiner, und dem zugehörigen Kurvenbilde für  $E$  und  $dE/dT$  liegen hier als Ordinaten andere Einheiten zugrunde. Etwa  $9^\circ$  unterhalb des Schmelzpunktes des Zinns zeigt die Kurve für  $E$  eine beträchtliche Richtungsänderung und etwa  $40^\circ$  über dem Schmelzpunkte ist eine nochmalige Richtungsänderung in gleichem Sinne wahrzunehmen. Entsprechend diesem Umstande hat auch die Kurve für  $dE/dT$  an diesen Stellen Richtungsänderungen aufzuweisen. Auch hier sei betont, daß der Verlauf der Kurve für  $dE/dT$  bei Wiederholung des Versuches in gleicher Weise wiederkehrte und nicht etwa einem Versuchsfehler zuzuschreiben ist. Doch muß wohl hervorgehoben werden, daß gerade beim Schmelzpunkte die Kurve *sehr gleichmäßig verläuft*. Eine sprunghafte Änderung hätte uns unbedingt in die Augen fallen müssen, da wir gerade in dieser Gegend eine beträchtliche Anzahl von Beobachtungen anstellten, und es scheint uns daher das Vorhandensein einer solchen ausgeschlossen.

#### Blei-Konstantan.

Wir haben schließlich noch an der Kombination Blei-Konstantan Versuche angestellt, da uns nach früheren Versuchsergebnissen des einen von uns bekannt war, daß hier bei höheren Temperaturen die Kurve für die gesamte thermo-



elektrische Kraft einen fast geradlinigen Verlauf aufweist. Wir vermuteten, daß hierbei eine kleine sprunghafte Änderung ganz besonders bemerkbar sein würde. Die folgende Tab. 6 und die Fig. 4 zeigen wiederum die Ergebnisse.

Tabelle 6.

E in Milli- volt	Temperaturangaben			Temp.- Diff.	E/ΔT in Mikro- volt	Wirkl. Temp. der heißen Ber.-Stelle
	heiß	kalt	außen			
1,068	425	200	23,2	225	47,6	448,2
1,150	429	184	"	245	46,9	452,2
1,182	429	180	"	249	47,5	452,2
1,192	430	179	"	251	"	453,2
1,201	431	177	"	254	47,8	454,2
1,169	428	183	23,4	245	47,7	451,4
1,134	423,5	186	24,1	237,5	"	447,6
1,063	414	192	"	222	47,9	438,1
1,022	408	193	"	215	47,7	432,1
0,9767	401	197	"	204	47,8	425,1
0,9393	394	"	24,2	197	47,7	418,2
0,8979	387	199	24,2	188	"	411,2
0,8504	376,5	200	24,3	178,5	"	400,8
0,7979	368,5	201	"	167,5	"	392,8
0,7363	356,5	202	"	154,2	"	380,8
0,6858	346,5	202,5	"	144	"	370,8
0,6383	337	202,5	"	134,5	47,4	361,3
0,6020	330	203	"	127	"	354,3
0,5736	324	203	24,2	121	47,5	348,2
0,5484	319,5	203,5	"	116	47,3	343,7
0,5353	316	203	"	113	"	340,2
0,5227	314	203,5	"	110,5	47,1	338,2
0,505	310,5	"	"	107	47,2	334,7
0,4889	307,5	"	"	104	47,1	331,7
0,4686	303	204	"	99	47,3	327,2
0,4424	298	204	"	94	47,1	322,2
0,406	287,5	204	"	83,5	48,5	311,7
0,402	285	204	"	81	49,6	309,2
0,3767	279	204	24,1	75	50,2	303,1
0,3202	270,5	203,5	"	67	47,8	294,6
0,2798	262	204	24,0	58	47,3	286
0,2081	247,5	"	"	43,5	47,8	271,5
0,1747	240,5	203,5	"	37	47,3	264,5
0,102	225	204	"	21	48,6	249
0,0724	216,5	"	23,7	12,5	49,9	240,2

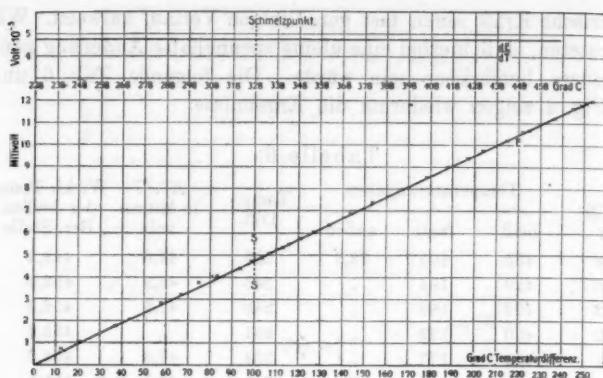


Fig. 4.

Trägt man die Zahlen der Tabelle für  $E$  in eine Kurve ein, so ersieht man, daß der Verlauf derselben, abgesehen von einer kleinen Unregelmäßigkeit bei der Temperaturdifferenz  $80^\circ$ , die übrigens auf einem Meßfehler beruhen kann, ein völlig geradliniger ist. Da sich tatsächlich die Kurve am besten durch eine vollkommene Gerade darstellen läßt, wird  $dE/dT$  im Bereiche von  $225-450^\circ\text{C}$ . konstant und zwar  $47,6$  Mikrovolt.<sup>1)</sup> Übrigens kann man gerade an diesem Beispiele sehen, daß die Werte von  $E/\Delta T$  zur Darstellung des Verlaufes der Thermokraft pro Grad nicht so brauchbar sind, wie die durch Interpolation gewonnenen, da im ersten Falle eben bei jedem kleinen Messungsfehler eine scheinbare Änderung auftritt, die den berechneten Werten von  $dE/dT$  fehlt. Andererseits fallen wirkliche Schwankungen wieder nicht im rechten Maße ins Gewicht, da nur der Verlauf der Größe  $dE/dT$  die tatsächliche Änderung der Thermokraft pro Grad angibt. Auch diesmal haben wir in der Nähe des Schmelzpunktes, der bei  $327^\circ$  liegt, die Beobachtungen sehr gehäuft, finden aber vollkommen

1) Unterhalb  $220^\circ\text{C}$ . hat  $dE/dT$  nach den früheren Messungen des einen von uns geringere Werte, die für  $20^\circ\text{C}$ . nur noch etwa  $29 \cdot 10^{-8}$  Volt betragen. Doch sind diese Zahlen nicht absolut vergleichbar, da damals mit käuflichem, jetzt aber mit reinem Blei gearbeitet wurde.

geradlinigen Verlauf von  $E$  mit der Temperatur und deshalb auch keinerlei unstetige Änderung von  $dE/dT$ .

Wir haben also als Ergebnis unserer Arbeit gefunden, daß bei keiner der untersuchten Metallkombinationen, wenn eines der Metalle flüssig oder fest wird, irgend ein Sprung der thermoelektrischen Kraft oder der Thermokraft pro Grad stattfindet, soweit wir bei der uns gegebenen Genauigkeit der Hilfsmittel das eben feststellen konnten.

Die rein thermodynamischen Theorien der Thermoelektrizität bieten keine Handhabe, dieses Ergebnis zu diskutieren. Wohl aber bieten die Elektronentheorien eine solche Handhabe. So findet z. B. H. A. Lorentz für die thermoelektrische Kraft den Ausdruck

$$E_2 - E_1 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \log \frac{N_b}{N_a} d\vartheta,$$

wobei  $\alpha$  aus der bekannten Gleichung  $mu^2/2 = \alpha \vartheta$  entnommen ist,  $e$  das Elementarquantum,  $N_b$  und  $N_a$  die Elektronenzahlen in beiden betrachteten Metallen darstellen. Wendet man diese Gleichung nur auf sehr kleine Temperaturdifferenzen an, so erhält man den Ausdruck für unser  $dE/dT$  und dieser ist dann

$$\frac{dE}{dT} = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{e} \log \frac{N_b}{N_a}.$$

Wenn also  $dE/dT$  am Schmelzpunkte eine sprunghafte Änderung erlitte, so müßte die Zahl der Elektronen in dem Metalle, welches flüssig wird, sich ebenfalls sprunghaft ändern. Ein Grund dafür ist nicht recht einzusehen. Zwar ist bekannt, daß der Widerstand eines Metalles bei der Änderung des Aggregatzustandes sich plötzlich ändert (etwa um das Doppelte zunimmt). Versuche darüber, ob dieser Sprung im absoluten Vakuum sich ändert, werden zurzeit von dem einen von uns ausgeführt und bald veröffentlicht werden. Es scheint überhaupt ausgeschlossen, daß  $dE/dT$  an irgend einer Stelle eine sprunghafte Änderung erfahren kann.

Eine der Lorentzschen Gleichung ähnliche hat jüngst K. Baedeker<sup>1)</sup> aufgestellt und darin die Zahlen der Elek-

1) K. Baedeker, Ann. d. Phys. 35. p. 75. 1911.

tronen durch deren Dampfdrucke über den betreffenden Metallen zu ersetzen vermocht. Sie heißt:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{R}{F} \log \frac{p_A}{p_B}.$$

Dabei bedeuten  $R$  die Gaskonstante,  $F$  die Äquivalentladung,  $p$  die Dampfdrucke. Nun folgt aus thermodynamischen Überlegungen, daß der Dampfdruck über dem festen Metall gleich dem über dem flüssigen sein muß. Aus einem solchen Ansatz folgt also zunächst direkt, daß kein Sprung vorhanden sein kann, sonst müßte man eine Kontaktpotentialdifferenz zwischen dem festen und dem flüssigen Metall annehmen, wie es die Herren Koenigsberger und Weiss<sup>1)</sup> tun. Aber auch dafür ist unseres Erachtens kein zwingender Grund einzusehen.

Gießen, Physikalisches Institut der Universität.

---

1) J. Koenigsberger u. J. Weiss, l. c. p. 22.

(Eingegangen 16. August 1911.)

6. *Lichtelektrische Untersuchungen an festen Dielektriken;*  
*von A. Goldmann u. S. Kalandyk.*

Einleitung.

Bei einigen festen Dielektriken tritt bei der Bestrahlung mit kurzwelligem Lichte ein ähnlicher lichtelektrischer Effekt wie an Metallen (Hallwachseffekt) auf: eine negativ geladene Oberfläche verliert ihre Ladung. A. Righi<sup>1)</sup> hat beobachtet, daß Schwefel und Ebonit bei der Bestrahlung eine negative Ladung zerstreuen und sich sogar schwach positiv aufladen. Später wurde von mehreren Forschern ein lichtelektrischer Effekt an verschiedenen schlecht leitenden Mineralien und Isolatoren gefunden.<sup>2)</sup> Nachdem von Lenard nachgewiesen wurde, daß die primäre Wirkung der Bestrahlung in der Auslösung langsamer Elektronen von der Metalloberfläche besteht, wurde ein ähnlicher Beweis für feste Dielektriken von R. Reiger<sup>3)</sup> durchgeführt.

Es sind demnach die lichtelektrischen Erscheinungen an Metallen und an Dielektriken im Prinzip identisch. Eigentümlichkeiten treten nur da auf, wo die geringe Leitfähigkeit der Dielektriken in Betracht kommt.

Hier sind zuerst die Erscheinungen der „Ermüdung“ zu erwähnen. Mit diesem Namen bezeichnet man schnelle Abnahme der Stärke des Effektes mit der Dauer der Belichtung. Sie wurde von A. Pochettino<sup>4)</sup> während der Untersuchung über den lichtelektrischen Effekt an Anthracen studiert.

1) A. Righi, *Compt. rend.* 107. p. 559. 1888.

2) Vgl. die vollständige Literaturzusammenfassung bei Chr. Ries, *Das Licht in seinen elektrischen u. magnetischen Wirkungen.* Leipzig 1909. p. 59—62.

3) R. Reiger, *Ann. d. Phys.* 17. p. 947. 1905.

4) A. Pochettino, *Rend. R. Acc. dei Lincei* (5) 15. (I) p. 355; (II) p. 171. 1906.

Die geringe Leitfähigkeit der Dielektriken ließ erwarten, daß bei ihnen das Licht neben dem Oberflächeneffekt auch eine Zunahme des Leitvermögens bewirken werde. Von W. Wilson<sup>1)</sup> wurden nach dieser Richtung Versuche angestellt, aus welchen sich ergeben hat, daß bei gekörnten oder granulären Schichten (sowohl von Silber als von Jodsilber) eine das Leitvermögen erhöhende Wirkung der ultravioletten Bestrahlung auftritt. W. Wilson<sup>2)</sup> sprach die Vermutung aus, daß auch vollkommenen Isolatoren durch Belichtung ein Leitvermögen erteilt werden könnte. Die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem lichtelektrischen Effekt und der durch Bestrahlung erzeugten Leitfähigkeit wurde in der allerletzten Zeit in einer Arbeit von Chr. Ries<sup>3)</sup> besprochen und wir wollen uns darauf beschränken, auf diese Arbeit hinzuweisen.

Die dritte Eigentümlichkeit des lichtelektrischen Effektes an festen Dielektriken, die da mit Notwendigkeit auftritt, wo durch Belichtung eine nach der Tiefe zu abnehmende Leitfähigkeit hervorgerufen wird, ist die Bildung einer starken Rückstandsladung. Auf diese Erscheinung machten Lenard und Sem Saeland<sup>4)</sup> aufmerksam, als sie die Leitfähigkeitszunahme verschiedener Phosphore bei Einwirkung roter Strahlen untersuchten.

Wir haben Versuche an verschiedenen festen Dielektriken (hauptsächlich am Schwefel) ausgeführt und dabei gefunden, daß hier in der Tat die ultraviolette Bestrahlung neben dem lichtelektrischen Oberflächeneffekt eine bedeutende Leitfähigkeitssteigerung hervorruft.

Bei solchen Untersuchungen treten die oben besprochenen Erscheinungen meistens gleichzeitig auf und verwickeln die Beobachtungen. Darum erscheint es zweckmäßig, die zur Messung verwendeten Methoden kurz zu analysieren.

Wir wollen zunächst zwischen einem transversalen und longitudinalen Effekt unterscheiden.

---

1) W. Wilson, Ann. d. Phys. 23. p. 107. 1907.

2) l. c. p. 109.

3) Chr. Ries, Physik. Zeitschr. 12. p. 530. 1911.

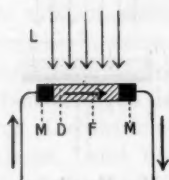
4) P. Lenard u. Sem Saeland, Ann. d. Phys. 28. p. 476. 1909.

Wir sprechen vom transversalen Effekt, wenn die Lichtstrahlen normal zu der Feldrichtung und symmetrisch in bezug auf beide Elektroden (Belegungen), zwischen welchen sich das Dielektrikum befindet, einfallen (Fig. 1). Bei der Bestrahlung entsteht dann ein Stromübergang zwischen den Elektroden oder der im Dunkeln vorhandene Strom wird verstärkt. Es hat sich ergeben, daß Paraffin keinen (oder einen sehr schwachen) transversalen Effekt zeigt. Dadurch wurde es möglich, sich durch Kontrollversuche mit Paraffin zu überzeugen, daß der lichtelektrische Strom von der mitbestrahlten negativen Elektrode im Verhältnis zu dem gesamten Effekt genügend schwach ist, so daß er nicht berücksichtigt zu werden braucht. Der transversale Effekt kann dann aus einer lichtelektrischen Strömung (negative Luftionen durch Bestrahlung des Dielektrikums) und einer Leitung durch das Dielektrikum, eventuell durch seine oberste Schicht bestehen. Die lichtelektrische Strömung kann der isolierten Elektrode eine negative Ladung zuführen, nicht eine positive.

Dieser Teil des Effektes müßte also unipolar sein. Der Leitfähigkeitseffekt muß dagegen von der Feldrichtung unabhängig sein.

Aus den Versuchen am Schwefel und einigen anderen Dielektriken ergab sich, daß der transversale Effekt von der Feldrichtung unabhängig und somit überwiegend als ein Leitfähigkeitseffekt aufzufassen ist.

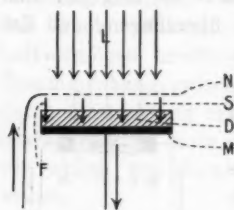
Wir sprechen vom longitudinalen Effekt, wenn das Dielektrikum in der Feldrichtung bestrahlt wird, wobei die Lichtstrahlen durch eine durchsichtige Elektrode (Belegung) einwirken. Bei unseren Versuchen diente ein Drahtnetz als durchsichtige Elektrode. Eine Luftschicht ist zwischen dem Dielektrikum und dem Drahtnetz immer vorhanden und beeinflußt wesentlich die Erscheinungen. Wir wollen sie bei den folgenden Betrachtungen berücksichtigen. Wesentlich ist auch das Vorhandensein eines schwachen lichtelektrischen Stromes vom Drahtnetz, wenn es negativ geladen ist. Das Ganze ist schematisch in Fig. 2 dargestellt.



$M$  = Metallelektroden,  
 $D$  = Dielektrikum,  
 $L$  = Lichtstrahlen,  
 $F$  = Feldrichtung.

Fig. 1.

Während der Bestrahlung findet ein Potentialausgleich in den Schichten, welchen ein Leitvermögen erteilt worden ist, statt. Tritt nur ein lichtelektrischer Oberflächeneffekt am Dielektrikum auf, wodurch in der Luft negative Ionen gebildet werden, so gleicht sich der Potentialunterschied zwischen dem Drahtnetz und der Oberfläche des Dielektrikums allmählich aus. Wird außerdem das Dielektrikum selbst leitend, so wird das



*M* = Metallplatte,  
*D* = Dielektrikum,  
*S* = Luftschicht,  
*N* = Drahtnetz,  
*L* = Lichtstrahlen,  
*F* = Feldrichtung.

Fig. 2.

Potential seiner Oberfläche den tiefer liegenden Schichten übermitteln. Man muß also an Dielektriken einen longitudinalen Oberflächeneffekt und Volumeneffekt unterscheiden.

In beiden Fällen wird auf der Metallplatte eine elektrische Ladung induziert und diese wird gemessen. Ein geschlossener Leitungsstrom kommt beim longitudinalen Effekt meistens nicht zustande, weil die an die Metallplatte angrenzende Dielektrikumschicht, vor der Lichtwirkung durch die oberen Schichten geschützt, isolierend bleibt.

Hier liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen dem transversalen und dem longitudinalen Effekt; beim ersten wird überwiegend eine direkt zugeführte Ladung, beim zweiten eine influenzierte Ladung gemessen.

Im letzten Falle strebt die influenzierte Ladung mit abnehmender Geschwindigkeit einem Grenzwerte zu. Die Ladungszunahme pro Zeiteinheit zeigt also nach der Bezeichnung von A. Pochettino<sup>1)</sup> eine starke Ermüdung. Es würde sich aber empfehlen, hier diesen Ausdruck zu vermeiden, weil diese „Ermüdung“ der Dielektriken in keinem inneren Zusammenhang mit der „Ermüdung“ beim lichtelektrischen Effekt an Metallen steht.

Ganz allgemein läßt sich der longitudinale Effekt als eine Rückstandsbildung auffassen. Die Rückstandsladung sammelt sich entweder an der Oberfläche des Dielektrikums oder in

1) A. Pochettino, l. c.



seinem Innern und bleibt nach der Aufhebung der Bestrahlung und somit auch der Leitfähigkeit bestehen. Wird das ursprüngliche Feld aufgehoben und durch Bestrahlung wieder ein Leitvermögen erzeugt, so wird der Rückstand allmählich frei.

Die Rückstandsladung an der Oberfläche nimmt pro Zeiteinheit um einen Betrag zu, welcher der pro Zeiteinheit durch die Luft zugeführten oder an die Luft abgegebenen Ladung gleich ist. Ihr zeitlicher Verlauf hängt also nur von der Charakteristik der lichtelektrischen Strömung ab. Wie die Rückstandsladung im Innern des Dielektrikums entsteht, ersieht man aus den Ausführungen von E. v. Schweidler<sup>1)</sup>, der auf Grund der Maxwellschen Theorie der „geschichteten“ Dielektriken den Fall eines Dielektrikums, dessen Leitvermögen sich kontinuierlich ändert, betrachtet hat. Durch Lichtwirkung, da die Lichtstärke nach der Tiefe zu abnimmt, wird dem Dielektrikum gerade ein nach der Tiefe zu abnehmendes Leitvermögen erteilt, so daß hier die Bedingungen, für welche die Schweidlersche Ableitung gilt, experimentell hergestellt sind. Es ist aber nicht gelungen, die Lösung der aufgestellten Gleichungen explizite darzustellen und darum ist ein Vergleich der empirischen Beziehungen mit der Theorie nicht ausführbar.

Der Nachweis, daß beim Schwefel und einigen anderen festen Dielektriken durch ultraviolettes Licht neben dem Oberflächeneffekt auch ein bedeutendes Leitvermögen auftritt, und die Aufklärung der oft komplizierten Formen der lichtelektrischen Erscheinungen an festen Dielektriken bilden den wesentlichen Inhalt der vorliegenden Untersuchung.

#### Die experimentelle Anordnung.

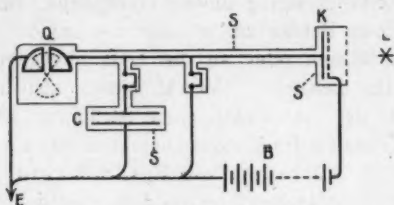
§ 1. Bei Messungen des longitudinalen Effektes wurde ein dazu gebauter Kondensator benutzt. Für den transversalen Effekt wurden verschiedene Anordnungen ausprobiert, welche ähnlich den üblichen Selenzellen waren. Wir wollen sie auch als „Zellen“ bezeichnen.

Der longitudinale sowie der transversale Effekt wurden in der Anordnung I (Fig. 3) untersucht, beim transversalen Effekt wurde auch die Anordnung II (Fig. 4) benutzt. Bezüg-

1) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. 24. p. 729. 1907.

lich der Einzelheiten der Anordnungen ist noch folgendes zu bemerken.

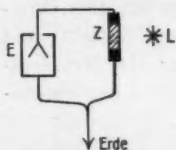
Das Quadrantelektrometer wurde in der Quadrantenschaltung benutzt; es war ein nach Dolezalek umgebautes In-



- L = Lichtquelle,  
 K = Versuchskondensator oder Zelle,  
 B = Batterie,  
 C = Kondensatorkasten,  
 Q = Quadrantelektrometer,  
 E = Erde,  
 S = elektrostatisch schirmende Hülle.

Fig. 3.

strument mit einer versilberten, an einem Metallfaden aufgehängten Glimmernadel (nach Scholl), welche auf einem konstanten Potential (110 Volt) erhalten wurde. Seine Empfindlichkeit betrug 15 Skt. pro Volt in den Vorversuchen und 45 Skt. pro Volt in den Versuchen mit Schwefel. Die Dämpfung war genügend stark, so daß auch größere Ausschläge sich in ca.  $\frac{1}{2}$  Min. einstellten. Die isolierte Leitung von einem Quadrantenpaar wurde vollständig elektrostatisch geschützt und an eine Belegung des Kondensators oder der Zelle angeschlossen.



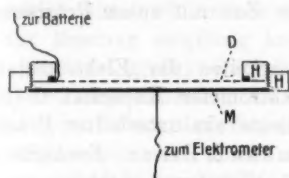
- L = Lichtquelle,  
 Z = Zelle,  
 E = Elektroskop.

Fig. 4.

Der Kondensator (Fig. 5) bestand aus zwei Hartgummiringen, die mittels eines Gewindes ineinander verschoben werden konnten. Der innere Ring trug ein straff gespanntes Messingdrahtnetz<sup>1)</sup>; am äußeren Ring wurde eine mit einer Dielektrikumschicht bedeckte Messingscheibe befestigt. Die

1) ca. 20 Maschen pro 1 mm<sup>2</sup>; Drahtdicke 0,09 mm.

Entfernung zwischen der Oberfläche des Dielektrikums und dem Drahtnetz konnte von der Berührung bis auf etwa 4 mm gebracht werden. Der Durchmesser des Drahtnetzes betrug 7,2 cm; der Durchmesser der Metallscheibe und der zu untersuchenden Dielektrikumschicht 10 cm, so daß ein 1,4 cm breiter äußerer Ring der Dielektrikumoberfläche immer im Dunkeln blieb, geschützt durch den inneren Hartgummiring.



D = Drahtnetz,  
M = Metallplatte,  
H = Hartgummiringe.

Fig. 5.



M = Metallkämmen,  
D = Dielektrikum.

Fig. 6.

Die Metallplatte stand in Verbindung mit dem Elektrometer, während das Drahtnetz auf einem konstanten Potential durch die Batterie *B* (Fig. 3) erhalten wurde.

Die Zelle, mittels deren die meisten Dielektriken untersucht wurden, hatte die aus der Fig. 6 ersichtliche Gestalt. Man ließ zwei Messigkämme mit ihren Zähnen derartig ineinandergreifen, daß ein etwa 1 mm breiter zickzackförmiger Zwischenraum zwischen den beiden blieb, welcher dann mit dem zu untersuchenden Dielektrikum ausgefüllt wurde. Diese Kämmen waren derartig an Streifen von Hartgummi festgeschraubt, daß sie sich nicht gegeneinander verschieben konnten. Bei Untersuchungen am Schwefel wurden Kämmen aus Aluminium benutzt. Die später gebrauchten Schwefelzellen, die den modernen Selenzellen noch mehr ähnlich waren, werden weiter unten beschrieben.

Eine Elektrode der Zelle wurde mit dem Elektrometer, die andere mit der Batterie verbunden.

Sowohl der Kondensator als auch die Zellen wurden bei den elektrometrischen Messungen wegen des elektrostatischen Schutzes in eine Metaldose eingeschlossen, deren vordere Wand

durch ein dichtes Metalldrahtnetz ersetzt wurde. Die Leitungen gingen durch Hartgummi- oder Paraffinkorke durch.

Die Batterie *B* (Fig. 3) bestand aus kleinen Akkumulatoren und gab Spannungen von 50—400 Volt. Ihre Spannung wurde von Zeit zu Zeit kontrolliert und erwies sich für unsere Messungen ausreichend konstant. Spannungen zwischen 10 und 100 Volt wurden auch durch Abzweigung von der Leitung einer großen 110-Voltbatterie gewonnen. Im letzteren Falle wurde die Spannung die ganze Zeit mit einem Präzisionsvoltmeter kontrolliert.

Um geeignete Geschwindigkeiten der Elektrometernadel herzustellen, wurde dem Elektrometer Kapazität *C* (Fig. 3) parallel geschaltet. Hierzu diente ein unterteilter Präzisionskondensatorkasten von Hartmann & Braun, Frankfurt a. M., der Kapazitäten von 0,001—1 Mikrofara<sup>d</sup> enthielt.

Die elektrometrischen Messungen gestalteten sich folgenderweise. Es wurde die Verbindung mit der Erde der mit einem Quadrantenpaar verbundenen Belegung gelöst und der Gang des Elektrometerzeigers zuerst im Dunkeln und dann bei der Bestrahlung ermittelt. Dabei wurde entweder die Zeit *t* des Durchganges einer bestimmten Anzahl Skalenteile mittels Stoppuhr gemessen, woraus sich die Aufladungsgeschwindigkeit (Stromstärke) berechnete, oder die „Aufladungskurve“ bestimmt, indem die Ausschläge bei zunehmender Zeit in gleichen Intervallen notiert wurden. Die Aufladungsgeschwindigkeit im Dunkeln wurde dann als Korrektion von dem Lichte<sup>ff</sup>ekte abgezogen.

Beim transversalen Effekt war es oft zweckmäßiger, die relativen Stromstärkenmessungen mit einem Elektroskop auszuführen. Dieses war eins der Exnerschen Form, versehen mit Natriumtrocknung und Spiegelskala. Dank der Vermeidung des parallaktischen Fehlers war die Genauigkeit der Angaben des Elektroskops genügend. Die mit den Blättchen des Elektroskops verbundene Elektrode wurde bis zu einem hohen Potential (300—400 Volt) geladen, während die andere Elektrode und das Gehäuse des Elektroskops zur Erde abgeleitet wurden. Es wurde die Zeit *t* gemessen, welche eins der Blättchen gebrauchte, um den Weg zwischen zwei bestimmten Skalenteilen zurückzulegen. Die Benutzung des Elektroskops hatte

noch den Vorteil, daß ein vollständiger elektrostatischer Schutz sich wegen seiner geringen Empfindlichkeit in bezug auf kleine Potentialschwankungen als überflüssig erwies, was oft eine größere Freiheit beim Experimentieren gewährte und dieses bedeutend erleichterte.

Als Lichtquelle der ultravioletten Strahlen diente eine Quarzquecksilberlampe von C. Heraeus, Hanau, für 110 Volt Netzspannung. Ihre Klemmspannung, welche 54—60 Volt betrug, wurde mittels Voltmeters dauernd kontrolliert und während der Messung sorgfältig konstant gehalten. Die Lampe wurde in einem großen Kasten mit einem Verschuß an der Vorderwand eingeschlossen. Es mußte darauf geachtet werden, daß der beim Öffnen des Verschlusses hinzukommende Luftstrom die Lampe nicht abkühlte, was leicht ein Sinken der Klemmspannung bis um 10 Volt hätte bedingen können. Dies wurde durch einen ausreichend starken Durchzug vermieden. Der Leuchtkörper war durchschnittlich etwa 20 cm vom Dielektrikum entfernt.

#### Versuche an Schellackschichten.

§ 2. Den Anlaß zu den Versuchen mit dünnen Schellackschichten gab eine Beobachtung von W. Wilson.<sup>1)</sup> Es scheint nach seinen Versuchen, als ob bei ultravioletter Bestrahlung einer mit hinreichend dünnen Schellackschicht überzogenen Aluminiumscheibe die im Aluminium erzeugten Elektronen zum Teil durch den Schellack gelangen. Schellack selbst soll wenig, wenn überhaupt lichtempfindlich sein.

W. Wilson gibt nicht an, wie seine Schellackschichten hergestellt wurden und wie dick sie waren, so daß wir seine Versuche nicht direkt nachbilden konnten.

Unsere dünnen Schellackschichten wurden aus einer käuflichen alkoholischen Schellacklösung hergestellt. Die Lösung wurde mittels eines Wattebausches auf die in einer Drehbank befestigte und langsam gedrehte Scheibe aufgetragen und dann durch vorsichtiges Erhitzen getrocknet. Wir erhielten sehr gleichmäßige lückenlose, durchsichtig gelbe Schichten.

1) W. Wilson, l. c. p. 128.

Die nackte Metallplatte, 3 mm vom Drahtnetz entfernt, zerstreute in der Anordnung I (Fig. 3) zuerst eine bestimmte negative Ladung in 1,7 sec; die gleiche positive etwa 50 mal langsamer. Mit einer Schellackschicht überzogen, zerstreute sie dieselbe negative Ladung in 3 sec; die gleiche positive wieder 40—50 mal langsamer. Noch eine Messung sei angegeben. Die Platte war 3 mm vom Drahtnetz entfernt, welches auf dem Potential  $V$  erhalten wurde. Die Zeit des Durchganges von 30 Skalenteilen ( $= \pm 2$  Volt) wird mit  $t$  bezeichnet. Es war für die nackte Platte.

bei  $V = + 16$  Volt  $t < 1$  sec

und

bei  $V = - 16$  Volt  $t = 103$  sec

und für dieselbe mit Schellack überzogene Platte

bei  $V = + 16$  Volt  $t = 2,5$  sec

und

bei  $V = - 16$  Volt  $t = 132$  sec.

Es tritt also eine starke Zerstreuung negativer Ladungen auch bei den mit Schellack überzogenen Platten auf. Dieser Effekt nimmt nicht ab, wenn man die Schellackschicht einigemal dicker nimmt. So war für eine mit Schellack überzogene Platte

bei  $V = + 80$  Volt  $t = 5$  sec.

Darauf wurde eine etwa dreifache (im ganzen mindestens 0,1 mm dicke) Schicht aufgetragen; es ergab sich

bei  $V = + 80$  Volt  $t = 1,3$  sec.

Daß die langsamen durch ultraviolettes Licht aus der Metallplatte ausgelösten Elektronen diese bis zu 0,1 mm dicken Schellackschichten durchdringen könnten, um dann den lichtelektrischen Strom zu bilden, ist wohl ausgeschlossen. Man muß die Ursache des Effektes im Schellack selbst suchen, und wir schließen daraus, daß Schellack lichtelektrisch empfindlich ist.<sup>1)</sup> Wurde in den Strahlengang eine ca. 4 mm dicke Glas-

1) Beim letzten Versuch war der Effekt bei der dünneren Schicht schwächer, als bei der verstärkten. Es wird wohl die „Ermüdung“ (vgl. weiter unten) daran schuld gewesen sein.

platte eingeschaltet, so blieb der Effekt aus. Es sind also die ultravioletten Strahlen, die den lichtelektrischen Effekt hervorrufen. Unsere Ansicht, daß wir hier mit dem Effekt am Schellack zu tun haben, wird noch durch folgende Versuche unterstützt.

Die nackte Metallplatte wurde mit einer möglichst dünnen (etwa 0,1 mm dicken) Paraffinschicht überzogen. Es trat bei der Bestrahlung keine Zerstreung negativer Ladungen auf.

Die Bestrahlung des Metalls war unter der Paraffinschicht kaum schwächer als unter der Schellackschicht. Konnten die Elektronen die Paraffinschicht nicht durchdringen, so war es wohl auch bei der Schellackschicht der Fall. Wir können daraus nur schließen: Paraffin gibt keinen lichtelektrischen Effekt<sup>1)</sup>; Schellack ist lichtelektrisch empfindlich.

Noch ein einfacher diesbezüglicher Versuch mag erwähnt werden, der unseres Wissens nicht beschrieben wurde.

Die Metallplatte wird in einigen Millimeter Entfernung dem zur Erde abgeleiteten Metalldrahtnetz isoliert gegenübergestellt; sie ist mit einem Goldblättchen-Elektroskop verbunden und negativ geladen. Bei der Bestrahlung mit ultraviolettem Licht fallen die Blättchen beinahe momentan zusammen. Nun wird die Platte in Paraffinöl eingetaucht und dann gegen das Fließpapier gepreßt, so daß nur eine ganz dünne Schicht Paraffinöls haften bleibt. Wird sie jetzt in der früheren Anordnung wieder belichtet, so fallen die Blättchen nur sehr langsam zusammen. Durch Abreiben mit Schmirgelpapier läßt sich der frühere Effekt wieder herstellen. Der qualitative Versuch zeigt also, daß auch diese dünne Flüssigkeitsschicht, die wohl kaum dicker als 0,01 mm war, die Elektronen beinahe vollständig absorbiert.

§ 3. Wir wollen den lichtelektrischen Effekt am Schellack näher betrachten. Zuerst ist für ihn wie für alle feste Dielektriken „die Ermüdung“ kennzeichnend.

Einen annähernd konstanten Effekt kann man bei diesen Schellackschichten nur dann erhalten, wenn man nur kurze Zeit (1 Minute) belichtet und zwischen den einzelnen Messungen die Schellackschicht genügende Zeit (etwa 5 Minuten) im Dunkeln läßt.

1) Vgl. R. Reiger, l. c. p. 946.



So wurden nacheinander die Zeiten  $t$  (vgl. p. 598) erhalten:

$$t = 32,2; 30,4; 30,5; 34,6; 35,5; 33,4; \\ 37,5; 37,2; 36,4; 35,2 \text{ sec.}$$

Als nachher der Kondensator dauernd belichtet wurde, nahm der Effekt rasch ab. Während ca. 20 Minuten wurde erhalten:

$$t = 35,2; 51,6; 66; 75,5 \text{ sec.}$$

Als hierauf der Kondensator wieder im Dunkeln gehalten und nur für kurze Zeit bestrahlt wurde, erhielten wir in den folgenden 35 Minuten

$$t = 63,2; 59,8 \text{ sec,}$$

also nur eine geringe Wiederherstellung der Empfindlichkeit. Die Ursache der Ermüdung ist die Anhäufung der positiven Ladung in der Oberfläche des Dielektrikums, wodurch das Feld zwischen dieser Oberfläche und dem Drahtnetz, somit auch der lichtelektrische Strom geschwächt wird. Gleichzeitig wird aber das Feld im Dielektrikum selbst verstärkt. Wegen der geringen noch vorhandenen Leitfähigkeit solcher Schichten<sup>1)</sup> im Dunkeln, wird diese positive Ladung wohl allmählich an die Metallplatte abgegeben, und nach der Erde abgeleitet. So erklären wir uns diese langsame Wiederherstellung der Empfindlichkeit und die Möglichkeit, unter den besprochenen Bedingungen eine beinahe konstante Empfindlichkeit zu erhalten. Jedenfalls findet bei den gut isolierenden Schichten, wie später zu besprechende Schwefelschichten sind, diese Wiederherstellung nicht statt.

In noch stärkerem Maße tritt die Ermüdung auf, wenn man von kleineren Feldstärken zu den größeren übergeht und dann zu den früheren Werten zurückkehrt. Bei derselben angelegten Spannung ist jetzt der Effekt bedeutend schwächer, als vorher. So wurde einmal bei  $V = +10$  Volt  $t = 29$  sec und, nachdem der Effekt bei  $V = +20$  Volt bestimmt wurde, wieder bei  $V = +10$  Volt  $t = 250$  sec gefunden.

Es ist wohl anzunehmen, daß die Schellackoberfläche während der Bestrahlung unter dem auf  $+20$  Volt geladenen Netz sich positiv geladen hatte, so daß später, als das Draht-

1) Vgl. H. Greinacher, Ann. d. Phys. 18. p. 1028. 1905.



netz wieder auf + 10 Volt geladen wurde, zwischen ihm und der Schellackschicht ein nur schwaches Feld bestand (vgl. auch p. 607).

Wir wollen noch einen Versuch an dünnen Schellack-schichten betreffend der Abhängigkeit des lichtelektrischen Effektes von der Lichtstärke erwähnen. Die Lichtstärke wurde durch Änderung der Entfernung  $d$  zwischen der Lampe und dem Kondensator variiert.

So wurde

bei  $d = 20$  cm  $t = 27,5$ ; 28 sec;

dann

bei  $d = 40$  cm  $t = 152$ ; 173 sec

und schließlich

bei  $d = 20$  cm,  $t = 29,6$ ; 30,2 sec

gefunden. Der Effekt scheint rascher, als umgekehrt proportional der zweiten Potenz der Entfernung abzunehmen. Dieses Resultat läßt vermuten, daß die wirksamen Strahlen schon in der Luft absorbiert werden. Es kommt hier aber wohl nicht die Absorption in der Luft selbst in Betracht, als vielmehr die Absorption durch den in der Luft gebildeten Ozon. Nach den Angaben von E. Meyer<sup>1)</sup> läßt sich berechnen, daß das Licht von der Wellenlänge  $260 \mu\mu$  um 30 Proz. in einer 20 cm langen Luftschicht geschwächt werden würde, wenn sie 0,006 Volumenprozent Ozon enthielte. Dieser Ozongehalt ist vielleicht nicht unwahrscheinlich, wenn man bedenkt, daß F. Fischer und F. Braehmer<sup>2)</sup> durch Bestrahlung reines Sauerstoffs mit der Quarzquecksilberlampe bis zu 0,14 Volumenprozent Ozon erhielten. — Wir haben die Frage nicht weiter verfolgt.

§ 4. Wir haben auch aus käuflichem Schellack Platten von ca. 1 mm Dicke gegossen und sie dann im Kondensator zwischen der Metallplatte und dem dicht anliegenden Drahtnetz eingeklemmt. Diese Schellackplatten waren sehr wenig durchsichtig. Die Lichtwirkung war jetzt von der Feldrichtung beinahe unabhängig. So wurde

bei  $V = + 50$  Volt  $t = 17,5$ ; 20 sec

1) E. Meyer, Ann. d. Phys. 12. p. 855. 1903.

2) F. Fischer u. F. Braehmer, Physik. Zeitschr. 6. p. 576. 1908.

und

bei  $V = -50$  Volt  $t = 16; 21$  sec

gefunden. Die Unabhängigkeit des Effektes von der Feldrichtung konnte entweder dadurch entstehen, daß der lichtelektrische Effekt an der Schellackoberfläche zufälligerweise dem am Drahtnetz bei negativer Ladung auftretenden Effekt gleich war, oder dadurch, daß der bestrahlten Schellackschicht ein Leitvermögen erteilt wurde. Durch die Messungen des transversalen Effektes (vgl. weiter unten) wird die letztere Annahme unterstützt.

Diese dicken Schellackschichten zeigten eine starke Neigung zur Bildung der Rückstandsladungen. Schon im Dunkeln lud sich das Elektrometer mit einer Geschwindigkeit auf, die nur langsam abnahm. Die starke Rückstandsbildung, welche wohl selbst zu einer neuen Feldverteilung führte, also selbst wie eine Art „Ermüdung“ wirkte, machte die Messungen in der angegebenen Form an diesen Schichten sehr unsicher.

Hier möchten wir nur noch eine Beobachtung über das „Freiwerden“ des Rückstandes durch die Bestrahlung mitteilen. Der Versuch gestaltete sich wie folgt:

Das Drahtnetz wurde auf  $-400$  Volt geladen. Im Dunkeln zeigte das Elektrometer eine negative Aufladung an, deren Geschwindigkeit durch Bestrahlung noch bedeutend erhöht wurde ( $-2$  Volt in  $t = 12$  sec). Dann wurde das Drahtnetz und die Platte zur Erde abgeleitet. Nachdem die Erdleitung der Platte gelöst worden war, zeigte das Elektrometer eine positive Aufladung an, welche bei der Bestrahlung wieder schneller ging ( $+2$  Volt in  $16$  sec). Die Schellackplatte blieb dann noch 48 Stunden im Dunkeln zwischen der Metallplatte und dem Drahtnetz, die geerdet waren. Jetzt zeigte das Elektrometer im Dunkeln, nach Aufhebung der Verbindung der Platte mit der Erde, keine Aufladung an, bei der Bestrahlung trat aber eine starke positive Ladung auf ( $+4,6$  Volt in  $4\frac{1}{2}$  Minuten). Da die Skala nicht weiter reichte, mußte die Ladung zur Erde abgeleitet werden, und dann wurde die Messung nochmals wiederholt; noch jetzt trat eine immer langsamer zunehmende positive Ladung auf ( $2,6$  Volt in  $5\frac{1}{2}$  Minuten).

§ 5. Weitere Versuche mit Schellack bezogen sich auf den transversalen Effekt. Der Zwischenraum der beschriebenen

Zelle (Fig. 6) wurde mit geschmolzenem Schellack ausgefüllt. Bei der Bestrahlung floß ein stärkerer Strom durch die Zelle als im Dunkeln; die Stromzunahme war dieselbe auch bei Umkehrung der Stromrichtung. So wurde von der mit dem Elektrometer verbundenen Elektrode bei einer Spannung von  $\pm 50$  Volt die Ladung  $+ 2,10^{-9}$  Coulomb in 47,5 sec und die Ladung  $- 2,10^{-9}$  Coulomb in 49,5 sec erhalten.

Wir fassen die Ergebnisse der Versuche mit Schellackschichten kurz zusammen:

1. Schellack gibt einen lichtelektrischen Oberflächeneffekt.
2. Die „Ermüdung“ ist auf die Schwächung des Feldes durch eine Oberflächenladung des Schellacks, welche sich dank seiner geringen Leitfähigkeit ansammelt, zurückzuführen.
3. Es wurde an dickeren Schellackschichten bei dicht anliegendem Drahtnetz ein lichtelektrischer Effekt beobachtet, der bei Umkehrung der Feldrichtung gleich stark war und als eine Leitvermögen erhöhende Wirkung ultravioletter Strahlen aufgefaßt wurde. Dementsprechend wurde auch ein von der Feldrichtung unabhängiger transversaler Effekt festgestellt.
4. Eine Rückstandsladung wurde der Schellackschicht durch Bestrahlung entzogen.

Wegen der merklichen Leitfähigkeit und der starken Rückstandsbildung im Dunkeln war Schellack ein für unsere Messungen wenig geeigneter Stoff. Wir suchten deshalb, nachdem die Erscheinungen so weit aufgeklärt waren, nach anderen lichtempfindlichen festen Dielektriken, von denen zu fordern war, daß sie das ultraviolette Licht möglichst stark absorbieren und bei starker Lichtempfindlichkeit möglichst gut im Dunkeln isolieren, und es ergab sich, daß Schwefel die gewünschten Eigenschaften in sehr hohem Maße besitzt.

#### Versuche am Schwefel.<sup>1)</sup>

§ 6. Der Schwefel ist als ein unter allen Umständen ziemlich vollkommener Isolator bekannt<sup>2)</sup>, auch der gegossene

---

1) Über die in §§ 7—11 beschriebenen Versuche haben wir in den Sitzungen der Kiewer physiko-mathematischen Gesellschaft am 14. Dezember 1909 und 13. Dezember 1910 Bericht erstattet.

2) A. Winkelmann, Handbuch d. Physik. 2. Aufl. 4. p. 150.

Schwefel, welcher sich während der ersten Stunden nach dem Erstarren leicht mit Werkzeugen bearbeiten läßt.<sup>1)</sup> Deswegen ist der Schwefel in neuerer Zeit wieder mehrfach als Isolator für die Elektroskope vorgeschlagen worden.<sup>2)</sup> Nach Angaben von Threlfall, Brearley und Allen<sup>3)</sup> sind der reine kristallinische, sowie der reine unlösliche (amorphe) Schwefel Nichtleiter; der spezifische Widerstand des ersteren soll größer als  $10^{10}$  Ohm cm sein. Ein Gemisch von löslichem und unlöslichem Schwefel hat noch den spezifischen Widerstand von  $10^{16}$  bis  $10^{17}$  Ohm cm, welcher sich bei Änderung des Prozentgehaltes von 3—88 Proz. wenig ändert.<sup>4)</sup> Hasenöhr<sup>5)</sup> findet für den gegossenen Schwefel den spezifischen Widerstand von etwa  $1,1 \cdot 10^{16}$  Ohm cm. Nach Versuchen von Schrödinger<sup>6)</sup> ist der Schwefel mehr widerstandsfähig gegen die feuchte Luft als Glas, Ebonit und Bernstein.

Nach Versuchen von Martens<sup>7)</sup> hat der Schwefel einen Streifen metallischer Reflexion bei der Wellenlänge  $220 \mu\mu$ . Diese Eigenschwingung muß als eine spezifische Eigenschaft des Schwefels angesehen werden.

Schon Monckmann<sup>8)</sup> hat beobachtet, daß Schwefel unter Einwirkung des Tageslichtes etwas besser als im Dunkeln leitet. Diese Beobachtung konnte von Threlfall, Brearley und Allen<sup>9)</sup> zwar nicht bestätigt werden, Bates<sup>10)</sup> findet aber wieder, daß Schwefel beim Tageslichte besser leitet.

Erst bei ultravioletter Bestrahlung tritt der Effekt in sehr starkem Maße auf, wie es weiter unten gezeigt wird.

Zu unseren Versuchen haben wir meistens den unter der Bezeichnung Sulfur sublimatum depuratum käuflichen Schwefel

1) Müller-Pouillet, Lehrbuch d. Physik. 10. Aufl. 4. 1. Hälfte. p. 125.

2) Z. B. Jervis Smith, Nature 77. p. 149. 1907.

3) R. Threlfall, D. Brearley u. B. Allen, Proc. Roy. Soc. 56. p. 32. 1894.

4) l. c. p. 39.

5) F. Hasenöhr, Wien. Ber. 107. p. 1040. 1898.

6) E. Schrödinger, Wien. Ber. 119. p. 1220. 1910.

7) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 6. p. 639. 1901.

8) J. Monckmann, Proc. Roy. Soc. 46. p. 143. 1889.

9) R. Threlfall, D. Brearley u. B. Allen, l. c.

10) W. Bates, Electrician 63. p. 907. 1909.

benutzt. Er wurde vorsichtig geschmolzen, auf die Platte gegossen und dann bis zur gewünschten Schichtdicke abgedreht. Die dünneren Schichten wurden durch Eintauchen der etwas vorgewärmten Platte in den flüssigen Schwefel erhalten. Die Platte und das Drahtnetz waren aus Messing. Es scheint, daß der Schwefel bei Zimmertemperatur mit Messing nur sehr langsam reagiert; mindestens war an der Schwefeloberfläche keine Veränderung an den Stellen zu sehen, die mit dem Drahtnetz in Berührung standen. Bei Schwefelzellen wurde als Elektrodenmetall das von Threlfall, Brearley und Allen empfohlene Aluminium gebraucht. Einige Zellen wurden aus dem von F. Kahlbaum (Berlin) in großen Kristallen, welche beim Schmelzen eine vollständig klare Flüssigkeit lieferten, bezogenen reinen Schwefel hergestellt. Sie ergaben dasselbe Resultat wie die anderen. In allen Fällen war die Isolationsfähigkeit des Schwefels im Vergleich zu anderen geprüften Stoffen vorzüglich. Der spezifische Widerstand des von uns benutzten Schwefels im Dunkeln würde sich zu etwa  $5 \cdot 10^{16}$  Ohm cm berechnen.

§ 7. Schon bei Messungen des longitudinalen Effektes am Schwefel stellte sich heraus, daß die Bestrahlung ein Leitvermögen in der Schwefelschicht erzeugt.

Um dies festzustellen, mußte man den Oberflächeneffekt am Schwefel ausschließen, wozu man das Drahtnetz auf ein negatives Potential zu laden hatte, so daß die eventuell gebildeten negativen Luftionen die Schwefeloberfläche nicht verlassen konnten. Nun gibt aber das Drahtnetz selbst einen Oberflächeneffekt, der berücksichtigt werden muß. Dies geschah, indem wir zuerst dem Drahtnetz eine blanke Metallplatte gegenüberstellten und den lichtelektrischen Strom vom negativ geladenen Drahtnetze maßen. Die Metallplatte wurde dann einmal mit einer Paraffin- und ein andermal mit einer Schwefelschicht bedeckt.

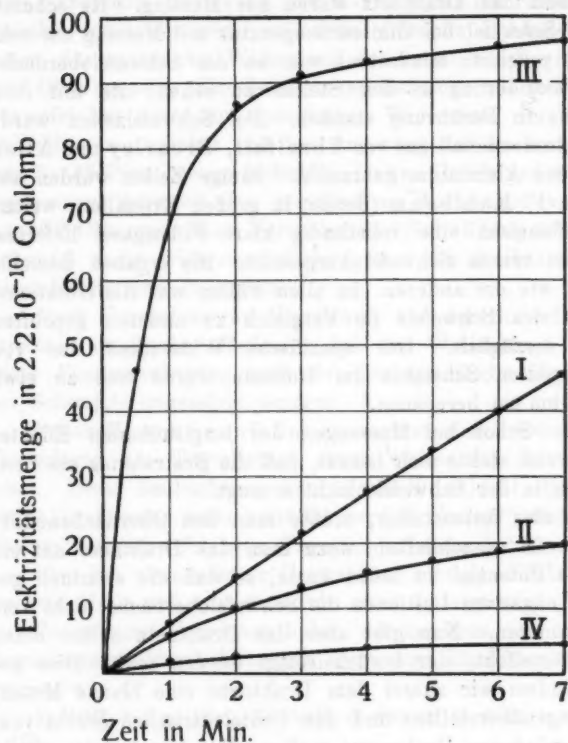
Aus der Vergleichung der erhaltenen Aufladungskurven (Kurven I, II und III der Fig. 7) ersieht man den wesentlichen Unterschied im Verlauf des Effektes.

Die experimentellen Bedingungen waren die folgenden.

Kurve I zeigt die gleichmäßige Aufladung der blanken Metallplatte durch den lichtelektrischen Strom vom Drahtnetz

an; dieses war 1 mm entfernt und wurde auf  $-200$  Volt gehalten.

Kurve II stellt die influenzierte Ladung der mit einer 1 mm dicken Paraffinschicht überzogenen Platte dar. Es blieb



- I = 1 mm Luft,  
 II = 1 mm Luft + 1 mm Paraffin,  
 III = 1 mm Luft + 1 mm Schwefel,  
 IV = 1 mm Paraffin.

Fig. 7.

1 mm Entfernung zwischen der Paraffinoberfläche und dem auf  $-200$  Volt geladenen Drahtnetz. Offenbar fließt der lichtelektrische Strom zwischen dem Drahtnetz und der Paraffin-

oberfläche so lange, bis die letztere das Potential des Drahtnetzes erhalten hat.

Kurve III wurde unter sonst gleichen Bedingungen wie die Kurve II erhalten; nur trug die Platte eine 1 mm dicke Schwefelschicht anstatt der Paraffinschicht. Die Zahlenangaben befinden sich in der Tab. I.

Tabelle 1.

$t$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6	7
$Q_I$	0	4	7,8	14,8	21,6	28	34	40	45,8
$Q_{II}$	0	3,2	5,8	10	13,1	15,4	17,3	18,8	19,9
$Q_{III}$	0	46	69	86,5	91	93	94,2	95,5	96,6
$Q_{IV}$	0		1,55	2,65	3,45	3,95	4,35	4,6	4,75

Die Zeit  $t$  ist in Minuten angegeben und die Ladungen  $Q$  in  $2,2 \cdot 10^{-10}$  Coulomb.

Man sieht, daß das Elektrometer nach Verlauf von 30 sec seit dem Beginn der Bestrahlung bei der Kurve III eine Ladung erhielt, welche etwa 13 mal größer war, als die ganze während der gleichen Zeit an die blanke Metallplatte (Kurve I) abgegebene Ladung. Dieser geringe Hallwachseffekt des Drahtnetzes kann also nicht Ursache der Aufladung bei der Kurve III sein, und wir müssen annehmen, daß hier die durchstrahlte Schwefelschicht leitend geworden ist.

Unter dem Einfluß des Feldes bewegen sich die Ladungen, bis sich die neue Feldverteilung eingestellt hat. Dann hat die weitere Belichtung keine Wirkung. Darum zeigt sich eine im Kondensator vorbelichtete Platte bei wiederholter Belichtung wenig oder gar nicht empfindlich, wenn sie sich unter derselben Spannung wie früher befindet. Es ist deshalb bei vergleichenden Messungen notwendig, entweder jedesmal neue Schwefelschichten zu bereiten oder die benutzten Schichten in ihren ursprünglichen Zustand zu versetzen.

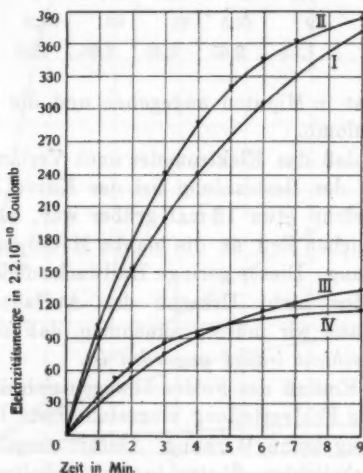
Zuerst haben wir zu jeder Messung eine frische Schicht hergestellt. So wurden auch die folgenden Messungen ausgeführt.

Es sollte ermittelt werden, wie sich der Effekt bei Umkehrung der Feldrichtung verhält. Es scheint, daß man dabei den Oberflächeneffekt sehr bedeutend schwächen kann, wenn



man das Drahtnetz dicht an das Dielektrikum anlegt. Das ersieht man auch aus der Fig. 7. Neben den besprochenen drei Kurven ist hier noch eine vierte angegeben, die mit derselben Paraffinschicht wie die Kurve II erhalten wurde; nur wurde das auf  $-200$  Volt geladene Drahtnetz an die Paraffinschicht angepreßt. Das Elektrometer zeigt eine noch etwa 4 mal schwächere Aufladung als bei der Kurve II an.

Wir nahmen  $0,5$  mm dicke Schwefelschichten, die dicht an das Drahtnetz angelegt wurden; das letztere wurde auf  $+300$  Volt, dann auf  $-300$  Volt geladen. (Kurven I und II der Fig. 8.) Die zahlenmäßigen Angaben sind in der Tab. 2



I:  $V = +300$  Volt,

III:  $V = +100$  Volt,

II:  $V = -300$  „

IV:  $V = -100$  „

Fig. 8.

zusammengestellt. Die beiden erhaltenen Kurven sind wenig voneinander verschieden. Demnach ist der Effekt von der Feldrichtung unabhängig, was wieder darauf hinweist, daß es kein Oberflächeneffekt ist. Die Aufladungskurven lassen sich mit einer genügenden Genauigkeit durch exponentielle Funktionen von der Art  $Q = a + b(1 - e^{-ct})$  darstellen, wobei  $a$



immer klein im Verhältnis zu  $b$  ist. Die nach den empirischen Formeln

$$Q_I = + [19,4 + 446,1 (1 - 10^{-0,0749t})] 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ Coulomb,}$$

$$Q_{II} = - [11,2 + 421,5 (1 - 10^{-0,1359t})] 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ Coulomb}$$

berechneten Werte befinden sich unter  $Q_I$  ber. und  $Q_{II}$  ber. in der Tab. 2.

Tabelle 2.

$t$	$Q_I$ beob.	$Q_I$ ber.	$Q_{II}$ beob.	$Q_{II}$ ber.
0	0		0	
$\frac{1}{2}$	50	56,3	55	49,9
1	90	90	102	102
$1\frac{1}{2}$	123	120,9	142	146,7
2	152	149,4	180	184,8
$2\frac{1}{2}$	179	175,5	213	217,4
3	202	199,4	242	245,7
$3\frac{1}{2}$	223	221,6	267	269,2
4	248	241,5	288	289,6
$4\frac{1}{2}$			307	307,1
5	277	277	322	322
$5\frac{1}{2}$	291	292,5	336	334,8
6	305	306,8	347	345,7
$6\frac{1}{2}$	319	319,9	355	355,1
7	331	332	363	363,1
$7\frac{1}{2}$	342	343	370	369,9
8	353	353,1	376	375,8
$8\frac{1}{2}$	362	362,4	381	380,7
9	371	371	385	385

Die Zeit  $t$  ist in Minuten angegeben und die Elektrizitätsmengen  $Q$  in  $2,2 \cdot 10^{-10}$  Coulomb.

Die Kurven III und IV der Fig. 8 wurden unter der Spannung  $\pm 100$  Volt erhalten. Sie haben eine ähnliche Form wie die Kurven I und II; nur sind die Ordinaten entsprechend kleiner.

§ 8. Wir wollen jetzt eine Dielektrikumschicht betrachten, die zwischen zwei metallischen  $1 \text{ cm}^2$  großen Flächen  $A$  und  $B$  (Fig. 9) eingeschlossen ist.

$A$  wird auf einem Potential  $+V$  Volt erhalten,  $B$  mittels einer zugeschalteten großen Kapazität auf einem von  $XO$  wenig verschiedenen Potential. Die elektrische

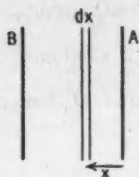


Fig. 9.

Kraft  $X$  ist im Anfang überall gleich. Dann wird dem Dielektrikum ein in der Richtung der  $x$ -Achse (von  $A$  nach  $B$ ) abnehmendes Leitvermögen  $k=f(x)$  erteilt. Wenn wir jetzt im Dielektrikum eine Schicht von der Dicke  $dx$  ins Auge fassen, so sehen wir, daß ein Überschuß von positiven Ladungen in dieser Schicht gleich im ersten Zeitelement  $dt$  entsteht, weil

in der Richtung nach  $A$  eine negative Elektrizitätsmenge  $Xk dt$  austritt und von der anderen Seite eine kleinere

$$X\left(k + \frac{dk}{dx}\right) dt$$

eintritt, so daß ein Überschuß von

$$-\frac{dk}{dx} X dt$$

von positiven Ladungen zurückbleibt. Somit häuft sich im Dielektrikum eine räumlich verteilte positive Ladung an, während eine gleiche negative Ladung an der vorderen Fläche  $A$  auftritt. Wir wollen annehmen, daß das Leitvermögen, wie es bei den bestrahlten Schwefelschichten der Fall ist, so rasch von  $A$  nach  $B$  abnimmt, daß es in der Nähe von  $B$  sehr gering ist und die vom Strom an  $B$  abgegebene Ladung gegen die influenzierte vernachlässigt werden kann. Dann können wir nach der Art einer Schwerpunktkonstruktion eine Größe  $\delta$  einführen, welche gewissermaßen die mittlere Eindringungstiefe der Ladungen charakterisiert und durch die Bedingung definiert wird, daß eine Ladung, welche der gesamten räumlich verteilten Ladung gleich ist, in dieser Entfernung  $\delta$  über die Fläche verteilt dieselbe Ladung in  $B$  induzieren soll, wie sie die räumlich verteilten Ladungen erzeugen. Wir bezeichnen die Dicke der Schicht durch  $a$ , die räumliche Dichtigkeit der Ladungen durch  $Q_x$  und die gesamte Ladung  $\int_0^a Q_x dx$  durch  $Q$ , dann ist

$$\frac{\delta}{a} \int_0^a Q_x dx = \int_0^a \frac{Q_x \times dx}{a}$$

und

$$\delta = \frac{\int_0^a Q_x \times dx}{Q}$$

$\delta$  kann auch eine Funktion der Zeit sein. Wir berechnen  $\delta$  für den Grenzzustand nach einer sehr langen Bestrahlung, wozu wir schätzungsweise aus den oben angegebenen empirischen Formeln den Grenzwert der influenzierten Ladung  $Q_i$  extrapolieren. Wir bezeichnen die belichtete Fläche des Schwefels mit  $F$ ; seine Dielektrizitätskonstante mit  $K$ ; das Potential der vorderen Belegung mit  $V$ , dann ist

$$Q_i = V \frac{KF\delta}{4\pi(a-\delta)a}$$

und da annähernd

$$F = \pi r^2 = \pi \cdot 3,6^2 \text{ cm}^2 \text{ und } K = 4$$

war, bekamen wir

$$Q_i = V 3,6^2 \frac{\delta}{a(a-\delta)},$$

woraus sich  $\delta$  berechnete.

Im Falle der Kurve I der Tab. 2 (Fig. 8) war  $a = 0,05 \text{ cm}$ ,  $V = 1 \text{ el.-stat. C.G.S.-Potentialeinheit}$  und der Grenzwert von  $Q_i$  war nach der Formel p. 609

$$Q = 465,5 \cdot 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ Coulomb} = 307 \text{ el.-stat. C.G.S.},$$

woraus sich  $\delta = 0,26 \text{ mm}$  berechnete.

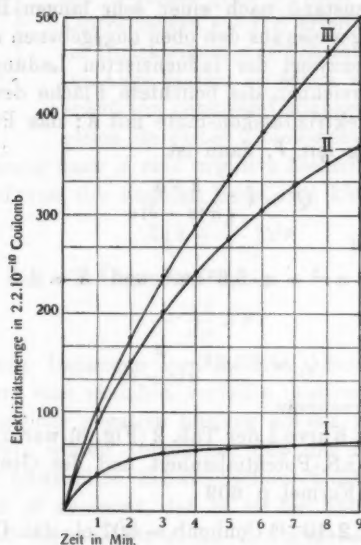
In derselben Weise haben wir  $\delta$  aus den Messungen, die bei verschiedenen Werten von  $V$  an 0,05 mm dicken Schwefelschichten angestellt wurden, berechnet und das Resultat in folgender Tabelle zusammengestellt.

$V = +100;$	$-100;$	$+200;$	$-200;$	$+300;$	$-300 \text{ Volt}$
$\delta = 0,27$	0,24	0,24	0,21	0,26	0,25 mm.

Die  $\delta$ -Werte sind annähernd konstant und die vorgekommenen Schwankungen würden sich aus ungleichmäßiger Dicke der verwendeten Schichten erklären lassen.

Wir müssen erwarten, daß bei dickeren Schwefelschichten derselbe Wert für  $\delta$  herauskommt, daß dagegen bei den noch dünneren als 0,5 mm Schwefelschichten schon ein merklicher

Strom die Schwefelschicht durchfließen wird, so daß die Aufladungsgeschwindigkeit nicht bis zum Nullwert sinken wird. In der Tat haben wir aus einer mit 1 mm starken Schwefelschicht bei  $V = +300$  Volt erhaltenen Kurve (Kurve I der Fig. 10)  $\delta = \text{ca. } 0,25 \text{ mm}$  berechnet, während an einer 0,2 bis



- I: Dicke der Schwefelschicht = 1 mm,  
 II: " " " = 0,5 mm,  
 III: " " " = 0,2—0,3 mm.

Fig. 10.

0,3 mm dicken Schwefelschicht bei  $V = +300$  Volt eine Aufladungskurve (Kurve III der Fig. 8) erhalten wurde, bei welcher die Aufladungsgeschwindigkeit schon viel langsamer abnimmt, als bei der Kurve II ( $a = 0,5 \text{ mm}$   $V = +300$  Volt), die mit der Kurve I der Fig. 8 identisch ist.

Diese drei Kurven der Fig. 10 wurden also bei derselben Spannung aufgenommen und stellen graphisch die Abhängigkeit des Effektes von der Schichtdicke dar. Die Anfangsgeschwindigkeit der Aufladung ist bei der Kurve III allerdings geringer,

als man erwarten sollte, was vielleicht darauf zurückzuführen ist, daß diese Schwefelschicht vorbelichtet und dann von der Ladung befreit wurde.

§ 9. Wenn man nämlich nicht für jede Messung eine neue Schwefelschicht herstellen will, so muß man versuchen, die auf und in den Schwefel übertragene Ladung zu entfernen. Unser Verfahren bestand darin, daß wir die vorbelichtete Schwefelplatte vorsichtig durch die Flammengase eines zur Erde abgeleiteten Bunsenbrenners zogen. Auf diese Weise wurde der ursprüngliche Zustand der Platte beinahe wiederhergestellt und bei der nochmaligen Bestrahlung bekamen wir Aufladungskurven, die von der ersten wenig verschieden waren. Dies ersieht man aus Fig. 11, in welcher vier solche an der-

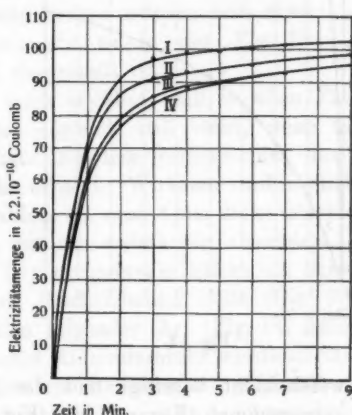


Fig. 11.

selben 1 mm dicken Schwefelplatte erhaltenen Kurven dargestellt sind. Die Schwefelschicht war um 1 mm von dem auf  $-200$  Volt geladenen Drahtnetz entfernt. Die Kurve I bezieht sich auf die frisch hergestellte Schwefelschicht, die Kurven II und III wurden aufgenommen, nachdem diese Schicht in der beschriebenen Weise regeneriert wurde, und die Kurve IV schließlich wurde am folgenden Tage mit der wieder regenerierten Schicht erhalten.

§ 10. In den vorhergehenden Versuchen haben wir den Oberflächeneffekt der Bestrahlung möglichst wenig zur Wirkung gebracht. Dagegen wollten wir diesen Effekt in folgendem Versuch hervorheben.

Wir benutzten eine 2 mm dicke Schwefelschicht, deren Oberfläche 3 mm vom Drahtnetz entfernt war. Das Drahtnetz hatte zuerst das Potential  $-300$  Volt, die erhaltene Aufladungskurve ist als I in Fig. 12 dargestellt; dann wurde die

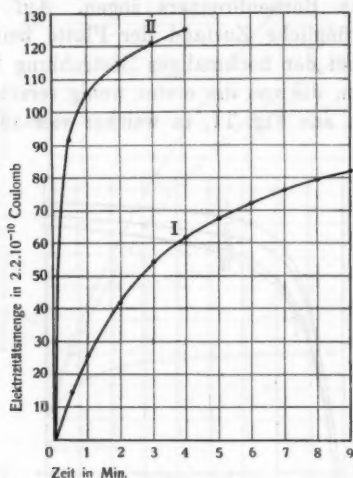


Fig. 12.

Ladung der Schwefelschicht beseitigt und die Messung bei  $V = +300$  Volt vorgenommen (Kurve II der Fig. 12).

Der Effekt war stark unipolar. Während der ersten 30 sec floß, wenn das Feld die negativen Ionen vom belichteten Schwefel wegführte, ein etwa 8 mal stärkerer Strom als bei der umgekehrten Feldrichtung; zieht man den von der Feldrichtung unabhängigen Leitungseffekt noch ab, so würde der Unterschied für die beiden Feldrichtungen wohl noch stärker sein.

Man sieht, daß wir imstande sind, durch eine entsprechende Wahl der Versuchsbedingungen dem longitudinalen Oberflächen- oder Volumeneffekt das Übergewicht im Anfang der Bestrahlung-

periode zu geben. Wird die Entfernung zwischen dem Dielektrikum und dem Drahtnetz im Verhältnisse zu der Dicke der Dielektrikumschicht groß genommen, so rührt die induzierte Ladung an erster Stelle vom Potentialausgleich zwischen dem Drahtnetz und der Oberfläche des Dielektrikums und der Effekt ist im Anfang unipolar. Dagegen ist der Effekt bei dicht anliegendem Drahtnetze wenig von der Feldrichtung abhängig. Allerdings wird auch im ersten Falle die gesamte Ladung, die nach einer ausreichend langen Zeit induziert wird, wohl von der Feldrichtung unabhängig sein, weil sie, nachdem sich das Potential des Dielektrikums und des Drahtnetzes ausgeglichen hat, nur noch durch den Leitungsvorgang im Dielektrikum bestimmt wird. Die Aufladungskurven würden also etwa so verlaufen, wie es in der Fig. 13 schematisch dargestellt ist.

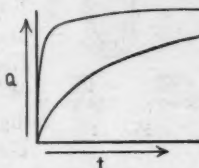


Fig. 13.

Es sei noch erwähnt, daß in allen Fällen die Nadel des Elektrometers sogleich still steht, wenn man das Licht abblendet hat. Folglich verschwindet das Leitvermögen im Dunkeln sehr schnell. Wirksam sind in allen Fällen nur ultraviolette Strahlen, da eine 4 mm dicke Glasplatte die wirksamen Strahlen so gut wie vollständig absorbiert.

§ 11. Der transversale Effekt am Schwefel wurde zuerst an der oben beschriebenen Zelle (Fig. 6) studiert. Später wurden Zellen folgender Art (Fig. 14) gebraucht. Ein unten abgeschlossenes Aluminiumrohr wurde durch Eintauchen in den in einem breiten Reagensglas geschmolzenen Schwefel mit einer sehr gleichmäßigen, etwa 1—2 mm dicken Schwefelschicht bedeckt. In diese wurden dann auf der Drehbank zwei spiralförmige flache Nuten mit einem Abstand von ca. 1 mm voneinander eingelegt. Vorsichtshalber empfiehlt es sich, die Schwefeloberfläche nicht abzdrehen, damit sie an den zwischen den Nuten liegenden Stellen unberührt bleibt. Auf die Nuten wurden zwei 0,2 mm dicke Aluminiumdrähte isoliert voneinander gewickelt. Die oberen Enden führten zu den auf Hartgummi montierten Klemmen (*K*, *K* Fig. 14) der Zelle; die anderen Enden, wie auch der obere Teil der Windungen, wurden mit Schwefel überdeckt. Nur der mittlere Teil blieb

frei und wurde dem Lichte ausgesetzt. Auch flache Zellen ähnlicher Art wurden gebaut. Solche Zellen isolieren im Dunkeln vorzüglich, wenn die Oberfläche des Schwefels nicht verunreinigt ist.



Fig. 14.

Elektroskopische Messungen (Anordnung der Fig. 4) an Schwefelzellen lassen dank der geringen Trägheit der Blättchen besonders scharf wahrnehmen, wie schnell das Leitvermögen im Dunkeln verschwindet. Mit einem Ruck fallen die Blättchen zusammen, sobald man die Zelle belichtet, und sowie man das Licht abblendet, stehen sie sogleich still. Während der Bestrahlung bleibt die Geschwindigkeit des Ladungsverlustes (die Stromstärke) konstant. So wurde z. B. bei einer Schwefelzelle

von der in Fig. 6 dargestellten Art bei andauernder Belichtung in Intervallen von einer Minute  $t = 5; 5; 5; 5; 5; 5$  sec mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,2$  sec gemessen. Als sich dann die Zelle im Dunkeln befand, ging in den folgenden  $2\frac{1}{2}$  Stunden nur ein Teil der früher in 5 sec abgeleiteten Ladung verloren. Das Leitvermögen der Zelle im Dunkeln war also jedenfalls mehr als 1500mal kleiner als bei der Bestrahlung.<sup>1)</sup> Weiter unten ist noch eine Messung angegeben, bei der die Bestrahlung über 1 Stunde ununterbrochen dauerte.

Die folgende Messung wurde mit dem Elektrometer (vgl. Anordnung in Fig. 3) ausgeführt. Während der Zeit  $t$  wurde an die mit dem Elektrometer verbundene Elektrode eine Ladung von  $\pm 2 \cdot 10^{-8}$  Coulomb abgegeben.

$V = + 50$	$+ 100$	$+ 200$	$+ 400$ Volt
$t = 81$	42	22,7	10 sec
$V = - 50$	$- 100$	$- 200$	$- 400$ Volt
$t = 78$	42	20	11,8 sec

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß der entstehende Strom proportional der Feldstärke und, wenn man die Feldrichtung umkehrt, gleich stark in beiden Richtungen ist. Auch bei niedrigeren Spannungen bleibt der Strom der Spannung proportional. So haben wir mit einer Schwefelzelle von der in

1) Wir erhielten bei der Bestrahlung Stromstärken bis zu  $1 \cdot 10^{-10}$  Amp. pro  $1 \text{ cm}^2$  Oberfläche bei der Feldstärke 10 Volt/mm.



Fig. 14 dargestellten Art bei einer Spannung von 100 Volt eine Ladung von  $1,65 \cdot 10^{-8}$  Coulomb in 24,9 sec und bei 10 Volt eine zehnmal kleinere Ladung in 22,4 sec am Elektrometer erhalten.

Kurz zusammenfassend sagen wir: *Die in der bestrahlten Schwefelschicht erzeugte Leitfähigkeit stellt sich sehr schnell ein, bleibt konstant während der fortdauernden Bestrahlung, ist unabhängig von der Feldstärke, bleibt konstant bei der Umkehrung der Feldrichtung und verschwindet augenblicklich im Dunkeln.*

Es könnte zuerst der Einwand gemacht werden, daß diese Leitung überhaupt nicht in der Schwefelschicht, sondern in der Luft stattfindet und ihren Ursprung in den bestrahlten Elektroden hat, indem die mit dem Elektrometer verbundene Elektrode, wenn sie negativ ist, Elektronen aussendet, die dann zu negativen Luftionen werden, oder, wenn sie positiv ist, die von der anderen Elektrode kommenden negativen Luftionen aufnimmt. Dieser Einwand wurde durch Kontrollversuche beseitigt. Wir haben den Schwefelzellen vollständig ähnliche Paraffinzellen gefertigt, so daß der Elektrodeneffekt derselbe wie bei den Schwefelzellen sein mußte. Dieselbe Zelle, die oben mit Schwefel eine Entladungszeit  $t = 5$  sec ergab, brauchte mit Paraffin ausgegossen unter sonst gleichen Bedingungen  $t = 380$  sec. Der lichtelektrische Effekt an Elektroden kann also höchstens etwa  $1\frac{1}{2}$  Proz. des gesamten an den Schwefelzellen erzeugten Stromes liefern; wahrscheinlich noch weniger.

Die Annahme, daß die durch Bestrahlung der Schwefeloberfläche in der Luft gebildeten Ionen den Strom übertragen, kann auch nicht aufrecht erhalten werden. Diese Ionen müßten dann wie sonst beim lichtelektrischen Effekt in überwiegender Zahl das negative Vorzeichen haben; dadurch könnte die mit dem Elektrometer verbundene Elektrode nur eine negative Ladung erhalten, nicht eine positive. Außerdem bleibt der Effekt noch ebenso stark, wenn man die Schwefelzelle (es wurden die flachen Zellen von der oben p. 616 beschriebenen Art genommen) mit einer dünnen Schicht Paraffinöl vollständig bedeckt. Ein Kontrollversuch an der in ähnlicher Weise mit Paraffinöl überdeckten Paraffinzelle lehrt uns, daß

das Paraffinöl selbst bei der Bestrahlung sehr wenig, wenn überhaupt leitend wird.<sup>1)</sup>

Auch eine eventuelle Erwärmung kann nicht als Ursache der Leitfähigkeit der Schwefelschicht bei der Bestrahlung angesehen werden, weil die Temperatur der Schwefelschicht, um so starke Effekte zu erzielen, fast bis zum Schmelzpunkt gesteigert werden müßte, was ausgeschlossen ist; außerdem könnte, von allem anderen abgesehen, dann die Leitfähigkeit nach der langen Bestrahlung nicht sofort verschwinden.

Wir kommen also zum Schluß, daß diese Leitfähigkeit in der Schwefelschicht als eine spezifische Wirkung des kurzwelligen Lichtes entsteht, was auch schon oben beim Studium des longitudinalen Effektes nachgewiesen wurde. Die Schwefelzellen sind insoweit den Selenzellen ähnlich, wenn auch für einen anderen Spektralbereich empfindlich.

Eine weitere Frage wäre, ob man die Lichtwirkung als eine physikalische oder chemische Umwandlung aufzufassen hat.

Wenn man den Vorgang vom chemischen Standpunkte erklären wollte, so müßte man annehmen, daß bei der Bestrahlung eine sehr gut leitende endotherme äußerst instabile Modifikation oder Verbindung des Schwefels entsteht, die sich von selbst mit einer sehr großen Geschwindigkeit in eine nichtleitende Modifikation oder Verbindung umwandelt. Nur so wäre möglich, daß sich im Lichte so schnell eine konstante Leitfähigkeit einstellt, die sich dann bei andauernder Beleuchtung nicht ändert, im Dunkeln aber sofort verschwindet. Auch kann man nicht annehmen, daß diese Abnahme der Leitfähigkeit im Dunkeln wegen des Verbrauchs der Ladungen durch den elektrischen Strom entsteht; dann müßte nämlich die Stromstärke in der Nähe des Sättigungswertes sein, was durchaus nicht der Fall ist: der Strom wächst der Spannung proportional. Nun ist uns von einer Modifikation des Schwefels, die so gut leiten sollte, nichts bekannt.<sup>2)</sup> Eine gut leitende

1) Hier sind wir anscheinend im Widerspruch mit den Versuchen von G. Szivessy u. K. Schäfer (Ann. d. Phys. 35. p. 510. 1911). Die für uns in Betracht kommenden Effekte sind aber wohl von anderer Größenordnung als die von jenen beobachteten.

2) Hier soll auf einen Druckfehler in der 3. Auflage der Physikalisch-Chemischen Tabellen von Landolt und Börnstein aufmerksam ge-

Verbindung, als welche hier wohl ein Oxydationsprodukt des Schwefels in Betracht kommen könnte, müßte dann selbst wieder zur Schwefelausscheidung führen, damit der nicht-leitende Zustand im Dunkeln gleich wieder hergestellt würde. Sie würde also auf chemischem Wege nicht direkt nachweisbar sein. Dies würde uns keine Richtlinien zur weiteren Forschung geben.

Die Verfasser sind geneigt, die Erklärung auf dem physikalischen Wege zu suchen. Daß eine physikalische Erklärung die chemische nicht ausschließt, darauf hat einer von uns schon früher hingewiesen.<sup>1)</sup>

§ 12. Wir versuchten noch den Einfluß der Feuchtigkeit und der Erwärmung auf die Lichtempfindlichkeit der Schwefelzellen zu ermitteln.

Sonst wurden die Versuche unter den gewöhnlichen atmosphärischen Bedingungen ausgeführt, jetzt schlossen wir die zylindrische Schwefelzelle in ein Phosphorperoxyd enthaltendes Reagensglas aus Quarz ein. Der Verschuß zwischen dem Quarzrohr und der Zelle war so dicht, daß das  $P_2O_5$  nach Verlauf einer Woche fast unverändert blieb; er bestand aus einem Stück starken Gummischlauches, welches oben noch mit Paraffin übergossen wurde.

Der Potentialunterschied zwischen den Elektroden war gleich 100 Volt. Es wurde die Zeit  $t$  einer Aufladung um  $5,5 \cdot 10^{-9}$  Coulomb gemessen.

Die Zelle ergab im Quarzreagensglas ohne Trockenmittel  $t = 10$  sec; dann wurde auf den Boden  $P_2O_5$  gebracht und wir erhielten sogleich  $t = 12,5$  sec, nach 5 Min.  $t = 16,5$  sec, nach 15 Min.  $t = 19,8$  sec, nach 25 Min.  $t = 22,3$  sec und nach 22 Stunden  $t = 31$  sec. Danach wurde die Zelle in einen mit Wasserdampf gesättigten Raum gebracht und wieder im Quarzreagensglas ohne  $P_2O_5$  geprüft. Sie ergab  $t = 7-8$  sec.

Man ersieht, daß der Effekt in der feuchten einmalig stärker als in der trockenen Luft ist.

macht werden. Es wird da in der Tabelle 223a p. 725 für das Leitvermögen des amorphen Schwefels bei  $69^\circ$  der Wert  $0,562 \cdot 10^{-10}$  (nach Fousserau) angegeben. Es soll  $0,562 \cdot 10^{-14}$  sein. (Vgl. G. Fousserau Ann. de chim et phys. (6) 5. p. 330. 1885.)

1) A. Goldmann, Ann. d. Phys. 27. p. 528. 1908.

Man könnte vermuten, daß vollständig getrockneter Schwefel keinen Effekt geben wird. Wir haben unter denselben Bedingungen wie oben mit derselben Zelle einen Versuch ausgeführt, wobei die Zelle etwa 100 Stunden getrocknet wurde. Diese Messung geben wir vollständig an. An jedem Tage wurden die Bestimmungen von  $t$  jede 5 Min. gemacht, während die Zelle ununterbrochen belichtet wurde. Die erste Messung geschah, sobald das Licht zugelassen wurde.

Es war, nachdem sich die Zelle 24 Stunden im Exsikkator befunden hat

$t$  = (die ersten Bestimmungen fehlen) 33; 32; 34 sec,  
am dritten Tage (nach 48 Stunden)  
 $t$  = 30; 34; 34,5; 34,5; 34,5; 34,2; 35,5; 34,2; 33,6; 34,2;  
33,6; 34,2; 34,4 sec,

am vierten Tage (nach 72 Stunden)

$t$  = 28,2; 34,5; 35,8; 35,2; 35,4; 35,4 sec,

am fünften Tage (nach 96 Stunden)

$t$  = 33,8; 36,8; 36,5; 36,2; 35,8 sec

und im Dunkeln wurde eine 50 mal kleinere Ladung in ca. 60 sec erhalten, so daß sich  $t$  für den Vorgang im Dunkeln zu ca. 3000 sec berechnet.

Aus diesen Zahlen, in Verbindung mit den oben angegebenen, ersieht man, daß eine rasche Abnahme des Effektes während der ersten Stunden stattfindet, wobei die Stromstärke etwa viermal schwächer wird. Dagegen bleibt der Effekt bei weiterem Verbleiben der Zelle im Exsikkator beinahe unverändert; er nimmt in den folgenden 72 Stunden kaum um 10 Proz. ab. Die Schwefelzelle lieferte bei der Bestrahlung, nachdem sie 96 Stunden getrocknet worden war, einen noch 100 mal stärkeren Strom als im Dunkeln. Es folgt daraus, daß auch der praktisch vollständig getrocknete Schwefel stark lichtempfindlich ist.

§ 13. Bei diesen Messungen fiel noch folgendes auf. Befand sich die Schwefelzelle ohne Spannung 24 Stunden im Dunkeln, so erhielten wir bei der ersten Bestimmung einen kleineren Wert von  $t$  als bei den folgenden. So war am

dritten Tage der erste Wert von  $t$  30 sec gegen etwa 34,3 sec als Mittelwert aus den darauf folgenden Bestimmungen:

am vierten Tage 28,2 sec gegen etwa 35,3 sec

und

„ fünften „ 33,8 „ „ „ 36,3 „

Die Stromstärke war also etwas größer im Anfang und sank bis zu einem Wert, der bei weiterer Bestrahlung konstant blieb.

Damit wohl im Zusammenhang steht die Beobachtung, daß bei einer Umkehrung der Stromrichtung ein stärkerer Strom auftritt, der bald zu dem normalen Wert herabsinkt. So war bei der ursprünglichen Stromrichtung  $t = 31$ ; 29,8; 31 sec und nach der Umkehrung der Feldrichtung  $t = 22,8$ ; 31; 31,2 sec.

Wir erwähnen noch, daß der Strom, wenn die Spannung erniedrigt wurde, zuerst mehr als proportional abgeschwächt wurde und dann allmählich stieg. So war bei  $V = 100$  Volt  $t = 31,2$  sec, nachdem die Spannung auf 10 Volt erniedrigt worden war, wurde eine zehnmal kleinere Ladung zuerst in 69 sec, nach 9 Min. in 43 sec, nach 19 Min. in 42 sec erhalten. Also nach 19 Min. war der Strom noch etwa um 26 Proz. schwächer, als man aus der Proportionalität zwischen der Stromstärke und der Spannung erwarten sollte.

Unter gewöhnlichen atmosphärischen Bedingungen haben wir solche Anomalien der lichtelektrischen Leitung nicht beobachtet. Es ist wahrscheinlich, daß diese Anomalien auf eine ungleichmäßige Verteilung des Feldes in den trockenen Schwefelschichten hinweisen und daß eine bestimmte Zeit nötig ist, damit sich eine neue Verteilung der Feldstärke entsprechend neuen Bedingungen ausbildet.

§ 14. Zur Ermittlung der Größe des Effektes bei verschiedenen Temperaturen wurde die in ein Quarzreagensglas eingeschlossene zylindrische Schwefelzelle elektrisch geheizt. Dabei wurde die Temperatur der Luft im Quarzglas und im Innern der Zelle (im Aluminiumrohr) bestimmt.

Setzt man die Zunahme der Stromstärke durch Lichtwirkung bei  $+27^{\circ}\text{C.}$  gleich 1, so war sie bei ca.  $+63^{\circ}\text{C.}$  gleich 2,5 und bei ca.  $+77^{\circ}\text{C.}$  gleich ca. 4. Bei einer Temperatur zwischen  $+70$  und  $+80^{\circ}\text{C.}$  war die Stromstärke im

Dunkeln noch etwa 11 mal schwächer als während der Bestrahlung.

Wir erwähnten, daß auch andere Körper auf ihre Lichtempfindlichkeit geprüft wurden. Zum Vergleich eigneten sich Messungen an der in Fig. 6 dargestellten Zelle. Am Anthracen war der Effekt schwächer als am Schwefel; noch schwächer am Naphthalin; in beiden Fällen war er doch bedeutend stärker als der kleine oben erwähnte Effekt an der Paraffinzelle.

#### Schluß.

Die Zusammenfassung der Ergebnisse ist in der Einleitung gegeben worden. Es mag der Gedankengang hier nochmals kurz wiederholt werden.

Die Erscheinungen eines durch ultraviolette Strahlen erzeugten Leitvermögens in festen Dielektriken verdienen Beachtung, weil sie mit dem lichtelektrischen Oberflächeneffekt, der auf der Elektronenaussendung beruht, zusammenhängen; sie werden an denjenigen Isolatoren und durch diejenigen Strahlen hervorgerufen, welche auch den lichtelektrischen Effekt geben; andererseits zeigen sie (der transversale Effekt) eine große Ähnlichkeit mit den Erscheinungen der Leitfähigkeitszunahme durch Bestrahlung beim Selen, die man in der neuesten Zeit auch mit elektronischen Vorgängen in Verbindung zu setzen suchte.<sup>1)</sup>

Außerdem gehören diese Erscheinungen, insofern das Leitvermögen im Dielektrikum von Schicht zu Schicht variiert (der longitudinale Effekt), zu einem Grenzgebiet, wo die Elektrostatik und die Stromlehre ineinander greifen. Es gelten hier gleichzeitig auch bei konstanter Spannung der Poissonsche Satz der Elektrostatik und das Ohmsche Gesetz der Stromlehre, die durch die Maxwellsche Kontinuitätsgleichung zusammenhängen. Da eine allgemeine Lösung dieser Gleichungen in analytischer Form nicht vorliegt, mußten wir einige Hilfsvorstellungen einführen, welche sich bei der Zusammenfassung der mannigfaltigen oft recht komplizierten Erscheinungsformen gut bewährt haben.

1) Vgl. A. H. Pfund, *Physik. Zeitschr.* 10. p. 343. 1909 u. Chr. Ries, *Physik. Zeitschr.* 12. p. 532. 1911.

Die Lösung der erwähnten Gleichungen in einer Form, welche den Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen gestatten würde, bleibt Vorbedingung für die Entscheidung der Frage, ob die Vorstellung einer mit der Schichtlage variablen Leitfähigkeit noch weiter im Sinne einer Iontheorie spezialisiert werden muß, worauf vielleicht die als Anomalien der Leitung bezeichneten Erscheinungen hinweisen.

Die Hilfsmittel zu den Untersuchungen wurden zum großen Teil aus einem uns in äußerst dankenswerter Weise von der Physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kiew überlassenen Fonds bestritten.

Die beschriebenen Versuche wurden im Physikalischen Laboratorium der Universität Kiew ausgeführt. Wir möchten auch an dieser Stelle nicht unterlassen, Hrn. Prof. J. J. Kossogow für die bereitwilligste Gewährung von Hilfsmitteln unseren besten Dank auszusprechen.

Leipzig im August 1911.

(Eingegangen 29. August 1911.)



## 7. Die Magnetisierbarkeit der Oxyd- und Oxydulsalze der Eisengruppe; von R. H. Weber.

1. In diesen Annalen, sowie an verschiedenen Stellen in den Sitzungsberichten und Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Rostock<sup>1)</sup> habe ich über Messungen der Magnetisierbarkeit von Oxyd- und Oxydulsalzen der Eisengruppe berichtet. Es seien hier diese Untersuchungen noch einmal im Zusammenhang besprochen.

Für meine Zwecke ist die gegebene Untersuchungsmethode die von Quincke angegebene mittels des magnetischen Manometers<sup>2)</sup>, die auch ohne Abänderungen überall verwendet wurde. In den Kapillaren des Quinckeschen Manometers steigt die zu untersuchende Salzlösung um eine Höhe  $h$  an, wenn in der Umgebung der Kuppe ein Magnetfeld  $H$  erzeugt wird. Diese Höhe wird mittels eines Mikroskops in relativem Maße gemessen. Im folgenden seien die Beziehungen zwischen diesen Steighöhen und den magnetischen Eigenschaften der Lösungen, der Lösungsmittel und der gelösten Salze zusammengestellt.

2. *Definition und Formel zur relativen Berechnung der Atommagnetismen.* Es sei  $\kappa$ , die Suszeptibilität eines Stoffes der Dichte  $d$ , also  $\mu = 1 + 4\pi\kappa$  seine Permeabilität, die so definiert sein möge, daß  $\mu = 1$  für den Äther wird, d. h. es ist  $1/\mu$  als der Proportionalitätsfaktor im Coulombschen Gesetz angesetzt.  $\kappa$  wird die im Magnetfeld 1 Gauss im Innern eines Körpers erzeugte Influenzmagnetisierung (magnetisches Moment der Volumeneinheit).

1) R. H. Weber, Ann. d. Phys. 19. p. 1056. 1906; Sitzungsber. u. Abh. d. naturw. Ges. zu Rostock 3. 1911. Auch separat verlegt bei H. Warkentien, Rostock unter den Titeln: „Die Magnetisierbarkeit der Chromosalze“, „Über die Magnetisierbarkeit der Kobaltsalze“, „Die Salze der Eisengruppe und die Weiss'sche Magnetonentheorie“.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 24. p. 369. 1885.



$\kappa'_i = \kappa_i/d$  ist die Suszeptibilität dieses Stoffes, wenn er in solcher Verdünnung vorhanden ist, daß 1 g einen Kubikzentimeter erfüllt (magnetisches Moment der Masseneinheit im Felde 1 Gauss). „Spezifische Suszeptibilität.“

$\kappa_i = m_i \kappa'_i = \kappa_i(m_i/d)$  ist die Suszeptibilität, die er haben würde, wenn sich  $m_i$  g in einem Kubikzentimeter befänden. Ist  $m_i$  das Molekulargewicht des Stoffes, so heißt  $\bar{\kappa}_i$  der „Molekularmagnetismus“. Ist der Körper ein Salz und  $m_i$  das Molekulargewicht, dividiert durch die Anzahl der im Molekül enthaltenen Metallatome, so soll  $\bar{\kappa}_i$  der „Atommagnetismus“ des Salzes heißen.

$p \cdot \kappa'_i$  ist allgemein die Suszeptibilität eines Stoffes, der in solcher Verdünnung vorhanden ist, das  $p$  g einen Kubikzentimeter erfüllen.

Es seien  $p$  g eines Salzes in 1 ccm Lösung enthalten; es sei  $s_i$  das spezifische Gewicht der Lösung. Dann trägt das Salz zur Suszeptibilität der Lösung den Wert  $p_i \kappa'_i$  bei, wenn  $\kappa'_i$  die spezifische Suszeptibilität.

Das Lösungsmittel in einem Kubikzentimeter hat das Gewicht  $(s - p)$ . Ist seine Suszeptibilität  $\kappa_0$ , seine Dichte  $s_0$ , seine spezifische Suszeptibilität also  $\kappa'_0 = \kappa_0/s_0$ , so trägt es zur Suszeptibilität der Lösung den Wert  $\kappa'_0(s - p)$  bei und die Suszeptibilität der Lösung wird

$$\kappa = \kappa'_i p + \kappa'_0(s_i - p) = \bar{\kappa}_i \frac{p_i}{m_i} + \kappa_0 \frac{s_i - p_i}{s_0}.$$

Für den Atommagnetismus folgt also

$$\bar{\kappa}_i \frac{p_i}{m_i} = \kappa - \kappa_0 \frac{s_i - p_i}{s_0}.$$

Für zwei Salze, je in einem anderen Lösungsmittel gelöst, folgt also die relative Formel

$$(1) \quad \frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{\kappa}_2} = \frac{\frac{p_2}{m_2} \kappa_1 - \kappa_{01} \frac{s_1 - p_1}{s_{01}}}{\frac{p_1}{m_1} \kappa_2 - \kappa_{02} \frac{s_2 - p_2}{s_{02}}},$$

worin nun  $\kappa_1, \kappa_2$  die Suszeptibilitäten der Lösungen,  $\kappa_{01}, \kappa_{02}$  die der Lösungsmittel,  $s_1, s_2$  die Dichten der Lösungen,  $s_{01}, s_{02}$  die der Lösungsmittel,  $p_1, p_2$  die Konzentrationen der Salze bedeuten.

3. Ragt eine Flüssigkeitssäule vom Querschnitt  $q$  in ein Magnetfeld von der Intensität  $H$  hinein, so wird sie vertikal aus der Ruhelage gehoben um eine Höhe  $h$ , und es ist (bei kleinen Suszeptibilitäten) damit eine Abnahme an magnetischer Energie im Betrage

$$-\Delta W = \frac{\kappa}{2} H^2 q h$$

verbunden. Die potentielle Energie der Flüssigkeitssäule wächst, wenn das kommunizierende Niveau sehr groß gegen den Querschnitt der Säule ist, um den Betrag

$$\Delta P = q h s \cdot h,$$

und es muß  $-\Delta W = \Delta P$  sein, wenn Gleichgewicht herrscht, Deshalb wird

$$(2) \quad \kappa = C \cdot s \cdot h,$$

worin  $C$  für alle Flüssigkeiten, bei Säulen von beliebigem Querschnitt eine und dieselbe Konstante ist, wenn sie im gleichen Magnetfeld untersucht werden. Es ist

$$C = \frac{2}{H^2},$$

Untersucht man die Lösungsmittel und Lösungen von Absatz 2 in demselben Magnetfeld, und findet man die Elevationen  $h_1, h_2$  für die zwei Lösungen,  $h_{01}, h_{02}$  für die zwei Lösungsmittel, so folgt nach (1) und (2)

$$(3) \quad \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{\frac{p_2}{m_2} \cdot h_1 s_1 - h_{01} (s_1 - p_1)}{\frac{p_1}{m_1} \cdot h_2 s_2 - h_{02} (s_2 - p_2)}.$$

4. Dieser Formel entsprechend sind im folgenden die Berechnungen der Messungen ausgeführt, wodurch sie den Charakter von *relativen* Messungen erhalten. Die Werte von  $\bar{x}_2$  sind den Tabellen von Liebknecht und Wills<sup>1)</sup> entnommen, denen ihrerseits eine Einheit der Suszeptibilität zugrunde liegt, die für Wasser die Suszeptibilität

$$\kappa = -0,75 \cdot 10^{-6}$$

1) O. Liebknecht u. A. P. Wills, Ann. d. Phys. 1. p. 186. 1900. vgl. A. Winkelmann, Hdb. 5. p. 282.

liefern würde.<sup>1)</sup> Die Unsicherheiten, die bisher nach unserer Kenntnis der Suszeptibilität des Wassers im absoluten Maßsystem anhaften, beeinflussen dementsprechend unsere Daten, die aber nun leicht auf jeden zuverlässigeren Wert von  $\alpha$  für Wasser umgerechnet werden können.

5. Da Liebknecht und Wills ihre Daten für die Temperatur von  $18^\circ$  angeben, und da nach dem Gesetz von Curie die spezifische Suszeptibilität, und damit der Molekularmagnetismus der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, und da meine Messungen, soweit sie überhaupt Anspruch auf Genauigkeit haben, für  $\bar{\alpha}_1$  und  $\bar{\alpha}_2$  in Gleichung (3) bei gleicher Temperatur ausgeführt sind, so gelten auch meine Messungen für die Temperatur von  $18^\circ$ .

#### Die Mangansalze.

1. In diesen Annalen<sup>2)</sup> habe ich relative Messungen ausgeführt, indem ich zunächst die Magnetisierbarkeit von Manganphosphat mit derjenigen von Mangansulfat und Manganchlorür verglichen habe. Diese Messungen scheinen ziemlich zuverlässig zu sein. Weniger günstig war das Ergebnis beim Vergleich von Mangansulfat und Manganosulfat. Die Übereinstimmung verschiedener Versuchsreihen war eine sehr viel geringere, was auf die rasche Zersetzbarkeit des Mangansulfats zurückzuführen ist.

2. In der gleichen Arbeit habe ich dann noch Lösungen von Mangansuperoxyd in Salzsäure untersucht, die, soweit mir damals bekannt war  $\text{MnCl}_4$  enthalten sollte. Es ergab sich dabei das eigentümliche Resultat, daß die Magnetisierbarkeit dieser Lösung — soweit die Beobachtungsgenauigkeit es zuließ — dieselbe war, wie die des Manganphosphats. Da es mir von vornherein unwahrscheinlich war, daß das dreiwertige und das vierwertige Mangan in Salzen die gleiche Magnetisierbarkeit besitzen sollten, so habe ich in meiner Arbeit immer nur von  $\text{MnCl}_x$  gesprochen.

1) O. Liebknecht u. A. P. Wills, l. c. p. 187; H. du Bois u. O. Liebknecht, Ann. d. Phys. 1. p. 194. 1900.

2) R. H. Weber, Ann. d. Phys. 19. p. 1056. 1906.

3. Wie ich später erfuhr, ist mein Verdacht durchaus berechtigt gewesen. Rein chemische Untersuchungen von Neumann, dann von Meyer und Best<sup>1)</sup> schreiben nämlich dem  $\text{MnO}_2$  in  $\text{HCl}$  gelöst die Formel  $\text{MnCl}_3$  zu, lassen also, meinen Messungen entsprechend, das Mangan in diesem Falle als dreiwertig erscheinen. Ich möchte daraus schließen, daß die Untersuchung der Magnetisierbarkeit nach der sehr einfachen Quinckeschen Methode unter Umständen ein gutes Mittel bietet, über die Wertigkeit des Metalles in Salzen zu entscheiden.

4. Meine damaligen Messungen ergaben für Mangani-phosphat die Magnetisierbarkeiten 0,01095; 0,01068; 0,01090 mit einem Mittelwert von

$$\text{MnPO}_4: \bar{x} = 0,01084.$$

Dabei sind die von Liebknecht und Wills gegebenen Werte

$$\text{MnSO}_4: \bar{x} = 0,01514$$

$$\text{MnCl}_2: \bar{x} = 0,01540$$

zugrunde gelegt.

#### Die Chromosalze.

1. Eine Messung der Chromosalze in Lösungen existiert schon, nämlich von Quincke.<sup>2)</sup> Das ist aber, soweit mir bekannt, die einzige Untersuchung an Lösungen, die bisher ausgeführt worden ist. Ich habe deswegen eine Wiederholung der Quinckeschen Messungen ausgeführt, wobei ich mich, der größeren Genauigkeit wegen, auf rein relative Messungen beschränkt und außerdem einige Vorsichtsmaßregeln getroffen habe, die die Reinheit der sehr leicht oxydierbaren Oxydsalze gewährleisten. So habe ich z. B. die Reduktion des Chlorids zu Chlorür direkt im Manometergefäß ausgeführt, so daß die Lösung nur mit der durch die eigene H-Entwicklung von Sauerstoff befreiten Atmosphäre in Berührung kommt.

1) Neumann, Monatschr. f. Chem. S. 489. 1894; Meyer u. Best, Zeitschr. f. anorg. Chemie. 22. S. 169.

2) G. Quincke, Wied. Ann. 24. p. 396. 1885. Das feste Salz  $\text{CrCl}_3$  ist in abgeschlossenen Gefäßen haltbar und wird z. B. von Kahlbaum in den Handel gebracht. Dieses Salz scheint St. Meyer magnetisch untersucht zu haben. Vgl. p. 687.

So ist die Lösung fast unbegrenzt haltbar. Außerdem habe ich durch gesonderte Versuche die Änderung der spezifischen Gewichte durch die Oxydation ermittelt.

2. *Das verwandte Magnetfeld.* Bei diesen sowie den folgenden Messungen an Kobaltsalzen diente das Feld zwischen den beiden Polschuhen eines Halbringelectromagneten von Hartmann & Braun für die magnetischen Messungen. Die Polschuhe waren durch kleine Messingstifte getrennt und hatten einen Abstand von 3,9 mm.

Der Rückstand des Magnetfeldes betrug, wie durch ballistische Messungen festgestellt wurde, höchstens 1 Proz. Da in die Konstante  $C$  das Feld im Quadrat eingeht, so konnte hiervon durchaus abgesehen werden.

Um zu entscheiden, wie weit der Strom exakt einreguliert werden mußte, um immer das gleiche Magnetfeld zwischen den Polen zu ergeben, wurde mittels einer kleinen Induktionsspule, die in einem Gaussschen magnetischen Etalon geeicht wurde, ballistisch das zu verschiedenen Ausschlägen eines Nadirinstrumentes (mit dem der magnetische Strom gemessen wurde) gehörige Feld festgestellt.

Es war

für $s = 34,0$ Skt.	$H = 3687,7$ Gauss
„ $= 61,9$ „	$H = 6440,7$ „
„ $= 101,0$ „	$H = 8830,1$ „
„ $= 146,0$ „	$H = 9999,3$ „
„ $= 231,3$ „	$H = 11290,8$ „

Die Empfindlichkeit des Nadirinstrumentes war 50 Skt. = 1 Amp., genauer 1 Skt. = 0,01989. Das Instrument zeigte bis 150 Skt. (Die letzte Zahl ist hierauf umgerechnet aus einer Schaltung für stärkere Ströme, 10 Skt. = 1 Amp.). Zwischen 0,5 Amp. und 3 Amp. kann man bis auf 1 Proz. die Gleichung ansetzen

$$H = \alpha s^2 + \beta s + \gamma,$$

worin  $\alpha = -0,5032$ ;  $\beta = 146,93$ ;  $\gamma = -782$  zu setzen ist. Es folgt dann, daß in der Umgebung von 2 Amp.

$$\frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial s} = 0,00513$$

wird. D. h. in der Nachbarschaft von 2 Amp., also 100 Skt., wächst mit jedem Skalenteil das Feld um 0,513 Proz., und deshalb wächst  $H^2$ , also  $C$ , mit jedem Skalenteil um etwa 1 Proz.

Man braucht also den Strom nur auf Bruchteile eines Skalenteils konstant zu erhalten, um eine ausreichende Konstanz von  $C$  zu erzielen.

3. *Die Dichten der Chromo- und Chromisalzlösungen.* Um mit möglichst kompendiösen Glasgefäßen arbeiten zu können, was sich als notwendig erwies,<sup>1)</sup> wurde eine Lösung (Lösung *d*) geeigneter Konzentration von  $\text{CrCl}_3$  mit geeigneter Menge  $\text{HCl}$  versetzt, der Chromgehalt analytisch bestimmt, und von dieser Lösung ein Teil zu Messungen der spezifischen Gewichte, ein anderer für die magnetischen Untersuchungen verwandt. Zu den Dichtemessungen wurde folgendermaßen verfahren:

In ein gebogenes Glasgefäß (*G* in Fig. 1) wurde eine abgewogene Menge obiger Lösung gebracht. Bei *z* wurde eine

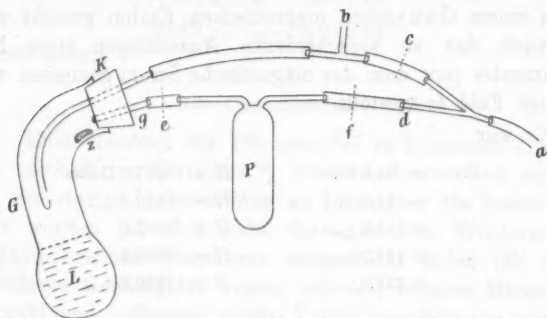


Fig. 1.

abgewogene Menge eisenfreies Zink niedergelegt. Das Gefäß wurde mit einem Gummistopfen *K* verschlossen, durch den zwei Glasröhren verschieden tief ins Innere führten. An die eine kürzere Glasröhre war mit Gummischlauch ein Pyknometer *P* von etwa 3 ccm Inhalt angesetzt, an die andere schloß

1) In komplizierten Gefäßen, wie ich sie anfangs verwandte, um die magnetisch untersuchte Flüssigkeit ohne Luftzutritt in ein Pyknometer überfließen zu lassen, und so an derselben Menge die Dichte zu bestimmen, gelang die Reduktion der  $\text{CrCl}_3$  zu  $\text{CrCl}_2$  nicht zuverlässig, wohl weil die Luft nicht zuverlässig entfernt werden konnte.

sich ein Gummischlauch an, der bei *b* ein T-Rohr trug und sich bei *d* mittels eines T-Stückes an das Pyknometer anschloß. (Die T-Stücke waren aus Glas gefertigt.) Wenn man bei *c* den Schlauch abquetschte, konnte man von *b* aus das ganze Gefäß mit dem Pyknometer mit Wasserstoff durchspülen. *a* tauchte dabei in ein Gefäß mit Wasser ein. Nach längerem Durchspülen wurde bei *b* abgequetscht, *c* geöffnet und durch Neigen des Gefäßes *G* das Zink *z* in die Lösung gebracht. Jetzt begann in *L* eine Wasserstoffentwicklung und bald eine merkwürdige Reduktion des Chromsalzes, das aus tiefem Grün in tiefes Himmelblau übergeht. Der entwickelte Wasserstoff entfernt dabei alle Luft aus den Gefäßen. Die blaue Lösung ist nun tagelang haltbar. Nachdem alle Wasserstoffentwicklung aufgehört hatte, blieb die Lösung noch einige Stunden stehen. Dann wurde das Gefäß geneigt, so daß die reduzierte Lösung in das Pyknometer übertrat. Wenn dieses gefüllt war, wurden die Schläuche bei *e* und *f* abgeklemmt, bei *d* und *g* von den Glasröhren entfernt, die Abklemmung geöffnet und die Schläuche vom Pyknometer entfernt. Dieser Weg war nötig, wenn das Pyknometer beim Abnehmen gefüllt bleiben sollte. Die reduzierte Lösung ist im Pyknometer sehr lange unverändert haltbar. Nur an den Enden der Kapillaren tritt eine schwache Grünfärbung der Lösung ein. Das Pyknometer wurde gewogen und nun die Lösung wieder oxydiert.

4. Das geschah in einem großen Erlenmeyerkolben, in dem sie den Boden eben bedeckte. Der Erlenmeyerkolben war durch einen Gummistopfen verschlossen, der zwei Bohrungen trug. Durch die eine führte ein Glasrohr tief hinein. Durch dieses konnte mit Wasser gesättigte Luft — damit kein Verdampfen eintritt — langsam eingepumpt werden. Die andere Bohrung enthielt ein gebogenes Glasrohr, das außen in ein Wassergefäß tauchte. Es diente dazu, die verbrauchte Luft wegzubefördern. Außerdem zeigte der Wasserstand im äußeren Rohre dieses Schenkels durch sein Steigen an, wie lange die Oxydation — d. h. der Sauerstoffverbrauch im Erlenmeyerkolben — dauerte. Der Luftwechsel im Erlenmeyerkolben (unter Schütteln) wurde stundenlang fortgesetzt, und schließlich die Lösung unter Luft noch eine Nacht stehen gelassen. Daß dann die Oxydation eine vollkommene war, ist wiederholt mit magnetischen Mes-



sungen festgestellt worden. Aus diesen folgt auch, daß in der Tat eine Konzentrationsänderung durch Verdunsten nicht eintritt. Nun wurde in einem anderen Pyknometer wieder das spezifische Gewicht festgestellt.

5. Bei der Oxydation der  $\text{CrCl}_2$ -Lösung zu  $\text{CrCl}_3$  tritt aller Wahrscheinlichkeit nach eine Volumveränderung und damit eine Konzentrationsänderung ein, die sich aber aus den Dichten und den chemischen Reaktionen berechnen läßt. Folgende Zusammenstellung zeigt, wie dies zu geschehen hat.

Angewandte Lösung . . . . .	6,8886 g
Dazu Zink . . . . .	1,2210 g
Es blieb übrig Zink . . . . .	0,3523 g
Also ist in Lösung gegangen . .	0,8687 g

Die chemische Analyse, Ausfällung als  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  und Wägung als  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , hatte ergeben:

In 100 g Lösung sind . . . . .	10,6472 g $\text{CrCl}_2$
Das gibt nach der Reduktion . . . . .	8,2682 g $\text{CrCl}_2$
und bei der Oxydation eine Aufnahme von	2,3790 g Cl

Die angewandte Lösung enthält demnach 0,73344 g  $\text{CrCl}_3$ , die in 0,56956 g  $\text{CrCl}_2$  übergehen und 0,16389 g Cl abgeben. Diese verbrauchten 0,1514 g Zn, während der Rest an Zn,  $0,8687 - 0,1514 = 0,7173$  g Zn die Salzsäure der Lösung  $d$  zersetzt, und dabei 0,0220 g H frei macht.

Die reduzierte Lösung besteht also aus

6,8886 g Lösung $d$
0,8687 g Zink
— 0,0220 g H

$$M_1 = 7,7353 \text{ g reduzierte Lösung.}$$

Es ergab sich das spezifische Gewicht in Luft

$$s_1 = 1,2959$$

und deshalb das Volumen der reduzierten Lösung

$$V_1 = 5,9691 \text{ ccm.}$$

Die angewandte Lösung  $d$ , dividiert durch die verbrauchte Menge Zink, beträgt 7,93.

Bei der Oxydation nimmt die  $\text{CrCl}_2$ -Lösung den dem 0,16389 g Cl äquivalenten Sauerstoff auf; das sind 0,03699 g O.



Es wiegt also die oxydierte Lösung nun  $7,7353 + 0,03699$  g, also ist ihr Gewicht

$$M_2 = 7,7723 \text{ g oxydierte Lösung.}$$

Es ergab sich

$$s_2 = 1,3089,$$

woraus das Volumen

$$V_2 = 5,9380 \text{ ccm.}$$

6. Es ergibt sich die merkwürdige Tatsache — die ich immer wieder beobachtet habe —, daß bei der Oxydation, also bei der *Aufnahme von Sauerstoff* eine *Volumverminderung* eintritt.

Es ist

$$\frac{V_{\text{red.}}}{V_{\text{oxyd.}}} = \frac{V_1}{V_2} = 1,0052,$$

eine Zahl, die natürlich von der Konzentration der Lösung abhängig sein wird.

Ein zweiter Versuch ergab

$$M_1 = 12,014 \text{ g red. Lös. } M_2 = 12,071 \text{ g oxyd. Lös.}$$

$$s_1 = 1,294$$

$$s_2 = 1,3082$$

$$V_1 = 9,284 \text{ ccm}$$

$$V_2 = 9,227 \text{ ccm,}$$

woraus

$$\frac{V_{\text{red.}}}{V_{\text{oxyd.}}} = 1,006,$$

Die angewandte Lösung  $d$ , dividiert durch die verbrauchte Zn-Menge, beträgt hier 7,91. Man hat also so gute Übereinstimmung in den Ergebnissen der beiden Versuche, wie man es nur erwarten kann.

7. Aus diesen Dichte- und Volummessungen berechnen sich die Konzentrationen.

*Reduzierte Lösung.* 0,5696 g  $\text{CrCl}_2$  in 5,9691 ccm, woraus

$$p_1 = 0,09542; m_1 = 123,2$$

$$p_1/m_1 = 7,7451 \cdot 10^{-4}$$

$$s_1 = 1,2959$$

$$s_1 - p_1 = 1,2005.$$

Oxydierte Lösung. 0,7334 g  $\text{CrCl}_3$  in 5,9380 ccm, woraus

$$p_2 = 0,1235; m_2 = 158,65$$

$$p_2/m_2 = 7,7844 \cdot 10^{-4}$$

$$s_2 = 1,3089$$

$$s_2 - p_2 = 1,1854$$

$$\frac{p_2/m_2}{p_1/m_1} = 1,0051$$

8. *Relative Messung der Suszeptibilität.* Diese Messungen sind dadurch erschwert, daß die im folgenden beschriebenen Manometerröhren rasch ihre Benetzbarkeit verlieren. Es müssen immer mit Chrom- und Schwefelsäure und dann mit heißem Wasser frisch gereinigte Gefäße verwandt werden. Ein Zusatz von Schwefelsäure zu den Lösungen, der dies bessern würde, ist nicht erlaubt. Es zeigte sich nämlich, daß die reduzierende Wirkung der  $\text{CrCl}_3$ -Lösung so stark ist, daß Schwefelsäure zu Schwefelwasserstoff zersetzt wird.

Als Manometergefäß diente ein Glasapparat der Form von Fig. 2. Die Reduktion der Chromchloridlösung wurde im

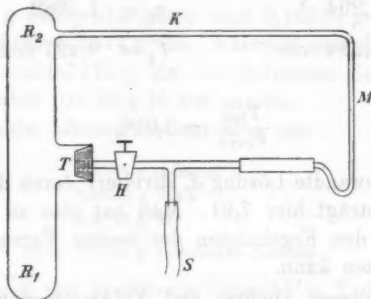


Fig. 2.

Schenkel  $R_1$  vorgenommen. Das anzuwendende gewogene Zink lag zunächst im Tubus  $T$ , während die abgewogene Lösung, mit  $\text{HCl}$  im geeigneten Verhältnis versetzt und mit analytisch festgestelltem Chromgehalt in  $R_1$  war. Das Gefäß wurde erst mit Wasserstoff durchspült, der Schlauch  $S$  ins Wasser geleitet und dann durch Kippen das Zink in die Lösung gebracht. Nachdem die Reaktion einige Zeit im Gange war,

wurde der Hahn  $H$  geschlossen, so daß der entwickelte Wasserstoff die Kapillare passieren mußte. Nach beendeter Reduktion wurde das Gefäß umgekehrt, so daß die Chlorürlösung in den Schenkel  $R_2$  floß. Die Stelle  $M$  der Kapillare kam ins Magnetfeld — und zwar bei allen Versuchen immer wieder an dieselbe Stelle des Spaltes zwischen den Polschuhen, was mit dem Mikroskop festgestellt wurde. — Jetzt wurde erst der Hahn geöffnet, wodurch die Lösung in die Kapillare eintrat. Durch Heben des Gefäßes wurde die Kuppenhöhe an die richtige Stelle im Gesichtsfeld gebracht und nun schnell eine Anzahl Messungen vorgenommen, d. h. es wurde mit dem Mikroskop die Hebung  $h$  der Kuppe durch das Magnetfeld bestimmt.

Die Beobachtungen wurden so lange fortgesetzt, als eine schnelle und präzise Einstellung stattfand. Nach einiger Zeit fing der Meniskus zu kriechen an, und die Einstellungen wurden unregelmäßig. Nur etwa bis zu sechs Beobachtungen waren durchaus zuverlässig.

Das bei der Reduktion übrig bleibende Zn wurde später zurückgewogen. Das gab eine Kontrolle, ob die Mischungsverhältnisse die gleichen waren, wie bei den Dichtemessungen.

Eine Untersuchung ergab für die magnetische Steighöhe  $h_1$  und die Dichte  $s_1$  der reduzierten Lösung

$$a) \quad h_1 = 48,3^1; \quad s_1 = 1,296 \text{ (vgl. p. 633).}$$

Angewandte Lösung dividiert durch Zinkmenge 7,89.

Eine zweite Untersuchung gab

$$b) \quad h_1 = 49,2; \quad s_1 = 1,296.$$

Angewandte Lösung dividiert durch Zinkmenge 7,69.

Sehr übereinstimmend sind die verbrauchten Zinkmengen ja nicht. Dadurch erklärt sich auch der Unterschied in den beiden Höhen  $h_1$ . Ein Fehler ist aber daraus nicht zu erwarten, da das Verhältnis der spezifischen Gewichte der reduzierten und der oxydierten Lösung in die Rechnung eingeht.

---

1) Mittel von 6 Messungen, die zwischen 48,0 und 48,5 schwanken.

Die Lösung wurde nun oxydiert, wie p. 631 beschrieben, und im selben, inzwischen gereinigten Gefäß untersucht. Es ergaben sich nun die magnetischen Steighöhen und Dichten

$$a) \quad h_2 = 25,7, \quad s_2 = 1,309,$$

$$b) \quad h_2 = 26,1, \quad s_2 = 1,309.$$

9. Als Lösungsmittel ist Zinkchloridlösung anzusehen. Um deren Einfluß auf die Steighöhen zu ermitteln, waren zwei Zinkchloridlösungen hergestellt worden, von verschiedenem Gehalt. Die eine enthielt

$$0,1207 \text{ g Zn in } 1 \text{ ccm}$$

und gab die Steighöhe

$$h_0 = -6,06.$$

Ihr Gehalt entsprach ungefähr dem der angewandten Lösungen, was sich nur sehr roh feststellen läßt. Eine genauere Feststellung ist aber auch nicht erforderlich; denn die zweite Lösung, mit

$$0,0791 \text{ g Zn in } 1 \text{ ccm}$$

gab die Höhe

$$h_0 = -6,2,$$

also nicht wesentlich verschieden, wie von vornherein zu erwarten. Es wird im folgenden

$$h_0 = -6,1$$

gesetzt.

Damit sind alle Daten gegeben, um das Verhältnis  $\bar{x}_1/\bar{x}_2$  zu bestimmen. Der Index 1 bezieht sich auf die reduzierte, der Index 2 auf die oxydierte Lösung.

10. Die Formel (3) (p. 626) ergibt mit den Daten p. 633, 634 und p. 635, 636 für Chromchlorür und Chromchlorid

$$a) \quad \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 1,720,$$

$$b) \quad \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 1,726,$$

in guter Übereinstimmung, so daß man also im Mittel

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 1,723$$

setzen kann.

Quincke findet (vgl. l. c. p. 401) für dieses Verhältnis 1,611. Das ist wohl im wesentlichen auf eine teilweise Oxydation beim Übergießen der reduzierten Lösung in das Manometer zurückzuführen. St. Meyer<sup>1)</sup> findet für die Molekularmagnetismen der festen Salze

$$\text{CrCl}_2: 6,18 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{Cr}_2\text{Cl}_3: 7,24 \cdot 10^{-6},$$

woraus sich das Verhältnis der Molekularmagnetismen  $\bar{x}_1/\bar{x}_2 = 1,71$  berechnen würde. Jedoch ist nicht klar, was mit  $\text{Cr}_2\text{Cl}_3$  gemeint ist. Ein Druckfehler liegt nicht vor, da auch mit dem entsprechenden Molekulargewicht gerechnet wird. Auch das angegebene Molekulargewicht von  $\text{CrCl}_2$  ist falsch.

11. *Anschluß an die Skala von Liebknecht und Wills.* In den Untersuchungen von Liebknecht und Wills<sup>2)</sup> fehlt zufällig das Chromchlorid, während das Chromsulfat darin enthalten ist. Um, wie in meinen Manganuntersuchungen, direkten Anschluß an die Beobachtungen von L. u. K. durch eigene Messungen zu erhalten, habe ich eine relative Messung von  $\bar{x}$  für  $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3$  und  $\text{CrCl}_3$  ausgeführt.

Eine Lösung von  $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3$ , der eine roh bekannte, sehr kleine Menge  $\text{H}_2\text{SO}_4$  zugesetzt war, wurde analysiert, magnetisch und auf ihre Dichte untersucht. Ein abgemessenes Volumen (15 ccm) dieser Lösung wurde dann in eine Chloridlösung übergeführt, indem das Cr als  $\text{Cr}(\text{OH})_3$  gefällt und in HCl gelöst wurde. Die Lösung wurde eingengt auf ein roh gemessenes Volumen  $v$ , und wieder auf 15 ccm verdünnt, wieder gewogen, die Dichte gemessen, und magnetisch untersucht.

Bei beiden Lösungen sind die magnetischen Steighöhen außerordentlich exakt meßbar gewesen. So ergab sich bei der  $\text{CrCl}_3$ -Lösung siebenmal hintereinander die Höhe 33,0. Für die  $\text{CrSO}_4$ -Lösung schwankte sie bei zwölf Messungen zwischen 30,8 und 31,0, auch beim Wechseln des Manometergefäßes, das hier natürlich eine einfachere Form hat als Fig. 2.

1) St. Meyer, Wied. Ann. 69. p. 240. 1899.

2) O. Liebknecht u. A. P. Wills, Ann. d. Phys. 1. p. 186. 1900; vgl. A. Winkelmann, Hdb. 5. p. 282.

Es ergab sich so

$$h_1 = 30,9, \quad s_1 = 1,1345, \quad p_1 = 0,1513 \text{ g/ccm},$$

$$h_2 = 33,0, \quad s_2 = 1,1132, \quad p_2 = 0,1220 \text{ g/ccm}.$$

Der Index 1 bedeutet das Sulfat, 2 das Chlorid. Die Molekulargewichte, dividiert durch die Atomzahlen, sind

$$m_1 = 392,8/2; \quad m_2 = 158,6,$$

also wird

$$\frac{p_1}{m_1} = 0,7704 \cdot 10^{-3}, \quad \frac{p_2}{m_2} = 0,7692 \cdot 10^{-3}.$$

12. Als Lösungsmittel für das Sulfat mußte eine sehr verdünnte  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Lösung angesehen werden, wie sie sich aus dem Zusatz von  $\text{H}_2\text{SO}_4$  zu der  $\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3$ -Lösung, nämlich 1 ccm konz.  $\text{H}_2\text{SO}_4$  auf 50 ccm Lösung, ergab. Eine solche Lösung gibt im Magnetfeld

$$h_{01} = -6,5,$$

während reines Wasser

$$h_0 = -6,8$$

ergab, also eine geringe Abhängigkeit von den in Frage kommenden Konzentrationen erwarten läßt.

Als Lösungsmittel für die  $\text{CrCl}_3$ -Lösung muß  $\text{HCl}$ -Lösung angesehen werden. Um die entsprechende Konzentration herzustellen, wurde konzentrierte Salzsäurelösung auf das in Nr. 11, 2. Abs. genannte Volumen  $v$  ungefähr eingeeengt, wobei sich dieselbe Konzentration einstellt. Dann wurde diese Menge auf 15 ccm verdünnt. Die  $\text{HCl}$ -Lösung zeigte zufällig ebenfalls

$$h_{01} = -6,5.$$

Diese Messungen ergaben

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 0,959.$$

Nach Liebknecht und Wills ist

$$\text{Cr}_2(\text{SO}_4)_3: \quad \bar{x}_1 = 0,00599,$$

also folgt

$$\text{CrCl}_3: \quad \bar{x}_2 = 0,00625,$$

jedenfalls ein Wert, der sich in die Messungen von L. u. K. gut einpaßt; denn für Chromnitrat finden sie  $\bar{x} = 0,00629$ .

Ich betone nochmals, daß diese Messungen mit großer Exaktheit durchführbar waren, so daß die letzte Dezimale kaum mehr als eine Einheit Unsicherheit bietet.

13. Unter Zugrundelegung dieser Werte können wir als definitives Ergebnis dieser Untersuchungen ansehen:

$\text{CrCl}_3$ :  $\bar{\alpha} = 0,00625$  (Chromisalz),

$\text{CoCl}_2$ :  $\bar{\alpha} = 0,01077$  (Chromosalz).

#### Die Kobaltsalze.

1. Die Resultate der Messungen der Kobaltsalze sind quantitativ nicht ganz einwandfrei, indem es mir nicht gelungen ist, in der für meine Zwecke erforderlichen Konzentration dieses Sulfat haltbar herzustellen. Jedoch ergab sich wenigstens das qualitative Ergebnis einwandfrei, daß auch beim Kobalt die Oxydulsalze die größere Magnetisierbarkeit besitzen. Daraus und aus meinen früheren Untersuchungen der Mangan- und Chromsalze bestätigt sich dann, was ich in einer älteren Arbeit<sup>1)</sup> vermutet habe, daß die Eisensalze mit ihrem umgekehrten Verhalten eine anormale Stellung einnehmen. Es bleibt allerdings noch die Frage zu entscheiden, wie sich die Nickelsalze verhalten. Das wird aber kaum möglich sein, da noch keine Nickelsalze hergestellt worden sind. Übrigens ist es wohl von vornherein kaum anzunehmen, daß sie sich wesentlich anders als die Kobaltsalze verhalten.

2. Die Herstellung des Kobaltisulfats geschah elektrolytisch nach einer von Marshall<sup>2)</sup> angegebenen Weise. In einer Pt-Schale befand sich  $\text{CoSO}_4$  in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  (1:8) konzentriert gelöst. Die Pt-Schale wurde von außen mit Eis gekühlt. Sie faßte etwas weniger als die von Marshall angewandte Schale. Deshalb wurde der elektrolysierende Strom auch etwas schwächer, etwa 1—1,2 Amp., gewählt. Als Anode diente eine Pt-Drahtspirale in einer engen Tonzelle, die verdünnte  $\text{H}_2\text{SO}_4$  enthielt. Sehr bald nach Stromschluß färbte sich die rote Kobaltlösung allmählich blaugrün. Nach längerem Stromdurchgang schied sich ein blauer Körper, teils schwammig, ab. Er besteht nach

1) R. H. Weber, Ann. d. Phys. 19. p. 1058. 1906.

2) J. T. Marshall, Journ. chem. Soc. 59. p. 761. 1891. Vgl. speziell für reines  $\text{Co}_3(\text{SO}_4)_2$ , ohne Alkalizusatz, p. 767.

Marshall aus  $\text{Co}_2(\text{SO}_4)_3$ . Zunächst wurde die blaugrüne Lösung selber — nach zweistündigem Stromdurchgang — untersucht. Später auch der nach sechs- und mehrstündigem Verlauf ausgeschiedene Körper in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  gelöst. Ein Unterschied in den Resultaten ergibt sich dabei nicht.

3. Es soll hier zunächst der am exaktesten gelungene Versuch beschrieben werden. Die oxydierte Lösung soll im Magnetfeld eine Steighöhe  $h_1$ , ein spezifisches Gewicht  $s_1$ , eine Konzentration  $p_1$  (g im ccm) und ein Molekulargewicht, dividiert durch Anzahl der Co-Atome im Molekül  $m_1$  besitzen.

Das Lösungsmittel ist verdünnte  $\text{H}_2\text{SO}_4$  mit einer magnetischen Steighöhe  $h_0$ . Die analogen Daten der wieder reduzierten Lösung (vgl. später) sollen die Indizes 2 tragen.

Es ergab sich so

$$\begin{array}{lll}
 h_1 = 28,0 & h_2 = 65,7 & h_0 = -5,0 \\
 s_1 = 1,308 & s_2 = 1,282 & \\
 p_1 = 0,213 & p_2 = 0,160 & \frac{p_2}{m_2} = \frac{p_1}{m_1} = 1,016. \\
 h_1 s_1 = 38,6 & h_2 s_2 = 84,2 & \\
 s_1 - p_1 = 1,095 & s_2 - p_2 = 1,122 & \\
 m_1 = 202,85 & m_2 = 154,8 &
 \end{array}$$

4. Um das Kobaltisalz wieder zu reduzieren, wurde ein 10 ccm-Kölbchen mit der Lösung gefüllt, gewogen und das Volumen  $v_1$  dieser Menge mittels des spezifischen Gewichtes bestimmt. Dann wurde es vorsichtig erwärmt, einige Zeit stehen gelassen, wodurch sich die Lösung reduziert und rot wird, dann nochmals erwärmt, wieder abkühlen gelassen, gewogen, das spezifische Gewicht gemessen und daraus das Volumen  $v_2$  bestimmt. Dann wurde die magnetische Messung vorgenommen.

Der Rest der Lösung  $v_2$  wurde wieder gewogen und durch Ausfällung mit  $\text{KOH} + \text{Br-Wasser}$  und Reduktion zu metallischem Co die Konzentration  $p_2$  bestimmt, aus der sich  $p_1$  berechnet.

5. Die Messung der Steighöhen im magnetischen Manometer war auch bei der oxydierten Lösung recht exakt möglich, obwohl fortwährend kleine Bläschen aufstiegen, die eine beginnende Reduktion anzeigten. Infolge dieser Reduktion ist das gewonnene Resultat nicht zuverlässig, da keine vollkommen oxydierte Lösung vorliegt. Deshalb habe ich auch bei keinen zwei Messungen das gleiche Resultat erhalten.



Die Bestimmung des spezifischen Gewichtes ist ebenfalls wegen der Gasentwicklung nicht sehr exakt möglich, doch ist von dieser Seite kein merklicher Fehler zu befürchten.

6. Das Verhältnis der Atommagnetismen berechnet sich nach der Formel (3) p. 626 und aus den Daten in Nr. 3 ergibt sich

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 0,477.$$

Nach Liebknecht und Wills<sup>1)</sup> ist für Kobaltosulfat  $\bar{x}_2 = 0,01019$ , so daß für Kobaltisulfat

$$\bar{x}_1 = 0,00486$$

folgen würde.

7. Eine angenäherte Formel, in der  $p_1, p_2$  vernachlässigt sind,  $v_1 = v_2$  und  $s_1 = s_2$  angenommen ist, würde lauten

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{h_1 - h_0}{h_2 - h_0}$$

und würde für unseren Fall

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 0,467$$

liefern, also einen Fehler von 2,1 Proz. ausmachen. Das ist in Anbetracht der übrigen Unzuverlässigkeiten, die aus der sofort einsetzenden Reduktion folgen, sehr geringfügig. Da diese Formel weder Kenntnis der spezifischen Gewichte, noch der Konzentrationen fordert, wurde eine Anzahl Messungen einfach nach dieser Formel ausgewertet. Es ergaben diese Messungen

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = 0,521; \quad = 0,55; \quad = 0,436; \quad = 0,536.$$

Die kleinsten Werte sind die wahrscheinlichsten; jedoch ist der Wert 0,436 deswegen nicht einwandfrei, weil er aus einer stark verdünnten Lösung gewonnen wurde, bei der die geringen Steighöhen nicht exakt genug ablesbar sind. Ich möchte deshalb bis auf weiteres obigen Wert 0,477 als den besten annehmen.

1) O. Liebknecht u. A. P. Wills, l. c.

## Die Salze der Eisengruppe und die Weiss'sche Magnetontheorie.

1. Langevin hat<sup>1)</sup> eine kinetische Elektronentheorie des Dia- und Paramagnetismus entwickelt, die sich in vielen Punkten gut an die Erfahrungstatsachen — z. B. das Gesetz von Curie, vgl. weiter unten — anschließt. Im Anschluß an diese Theorie hat P. Weiss<sup>2)</sup> eine Magnetontheorie abgeleitet, die auch die ferromagnetischen Körper, z. B. den Magnetit, mit umfaßt.

Es sei  $\sigma_{mo}$  das magnetische Moment eines Moleküls, bezogen auf das Grammmolekül beim absoluten Nullpunkt der Temperatur. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß, auch wenn der betreffende Körper nicht magnetisch ist, sich also nicht in einem Magnetfeld befindet, doch jedes Molekül ein magnetisches Moment besitzt, das aber nach außen hin nicht wahrnehmbar ist, wegen der allgemeinen Unordnung der Moleküle. Wie bei anderen Molekulareigenschaften wird dieses Moment auf die Grammmolekel bezogen, um keine Voraussetzung über die wahre Größe eines Moleküls machen zu müssen. Der Wert dieses Momentes beim absoluten Nullpunkt ist ein Maximum, weil hier keine thermische Unruhe der orientierenden Wirkung des Magnetfeldes entgegenwirkt.

Es sei ferner  $\sigma_m$  dieses Moment bei beliebiger Temperatur, erzeugt durch ein Magnetfeld  $H$ , so daß  $\chi = \sigma_m/H$  die molekulare Magnetisierbarkeit des betreffenden Stoffes, also Suszeptibilität mal Molekulargewicht dividiert durch Dichte ist.

Nennt man ( $R = 83,155 \cdot 10^6$  erz/grad)

$$(1) \quad \frac{\sigma_{mo} \cdot H}{RT} = a,$$

so wird nach der Theorie von Langevin

$$(2) \quad \frac{\sigma_m}{\sigma_{mo}} = \cot. \text{hyp. } a - \frac{1}{a},$$

und mit wachsendem  $a$ , also mit wachsendem  $H$  sowohl, wie mit abnehmender Temperatur  $T$  nähert sich  $\sigma_m$ , wie erforderlich, dem Werte  $\sigma_{mo}$ . Mit abnehmendem  $a$  dagegen dem Werte 0.

1) P. Langevin, Ann. Chem. Phys. (8). 5. p. 70. 1905.

2) P. Weiss, Arch. de Genève (4). 8. p. 401. 1911. Vgl. auch C. R. von 1911, an verschiedenen Orten.

Wenn der nach (1) definierte Wert von  $a$  nur klein ist, weil z. B.  $\sigma_{mo}$  klein ist, so ergibt eine Entwicklung von (2) nach  $a$ , die mit dem ersten Gliede abbricht.

$$\frac{\sigma_{mo}}{\sigma_{mo}} = \frac{a}{3} = \frac{\sigma_{mo} H}{3 R T}.$$

(Das nächste Glied wird  $-\frac{1}{45} a^3$ .) In diesem Falle wird also

$$(3) \quad \chi = \frac{\sigma_{mo}^2}{3 R T}$$

und

$$\chi T = C_m,$$

eine Konstante, die „Curiesche Konstante“, auf die Gramm-molekel bezogen. Auf die Maßeinheit bezogen erhält dies Gesetz die Form, die Curie ihm gegeben hat

$$\chi' \cdot T = C,$$

worin, wenn  $d$  die Dichte,  $\chi' = \chi/d$  ist und  $\chi$  die Suszeptibilität im gewöhnlichen Sinne bedeutet, die mit der Permeabilität  $\mu$  in der Relation  $\mu = 1 + 4\pi\chi$  steht.

Weiss zeigt nun an einer großen Zahl von Beispielen, daß für alle von ihm betrachteten Substanzen dieses  $\sigma_{mo}$  nahezu ein ganzzahliges Vielfaches eines Normalwertes, nämlich von

$$1123,5 \text{ C.G.S.}$$

ist. Und er nimmt an, daß dieser Wert das Moment des „Grammagnetons“ ist, und daß jedes Molekül eine ganze Zahl von solchen Magnetonen enthält.

Für eine schwach paramagnetische Substanz berechnet sich

$$(4) \quad \sigma_{mo} = \sqrt{3 R T \cdot \chi},$$

woraus

$$a = H \sqrt{\frac{3\chi}{RT}}$$

folgt. Dieser Wert muß also klein sein, wenn unsere Ableitung richtig sein soll. Wegen der Größe von  $R$  ist das aber bald erfüllt, auch bei starken Feldern  $H$ .

Es berechnet sich weiter die ganze Zahl  $n$  aus

$$(5) \quad \sigma_{mo} = n \cdot 1123,5.$$

2. Die besprochenen Messungen, sowie die Messungen von Liebknecht und Wills ergeben die in folgender Tabelle zusammengestellten Atommagnetismen:

(W.) <sup>1)</sup>	$\text{CrCl}_3$ :	$\bar{x} = 0,00625$ (Chromisalz).
(W.)	$\text{CrCl}_2$ :	$\bar{x} = 0,01078$ (Chromosalz).
(W.)	$\text{MnPO}_4$ :	$\bar{x} = 0,01084$ (Manganisalz).
(L. u. K.)	$\text{Mn(SO}_4)_2$ :	$\bar{x} = 0,01514$ (Manganosalz).
(L. u. K.)	$\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ :	$\bar{x} = 0,01515$ (Ferrisalz).
(L. u. K.)	$\text{FeSO}_4$ :	$\bar{x} = 0,01272$ (Ferrosalz).
(W.)	$\text{Co}_2(\text{SO}_4)_3$ :	$\bar{x} < 0,00486$ (Kobaltisalz).
(L. u. K.)	$\text{CoSO}_4$ :	$\bar{x} = 0,01019$ (Kobaltosalz).
	$\text{Ni}_2(\text{SO}_4)_3$ :	$\bar{x} = ?$
(L. u. K.)	$\text{NiSO}_4$ :	$\bar{x} = 0,00435$ (Nickelosalz).

Auffällig an diesen Zahlen ist, daß gewisse Werte zum mindestens der Größenordnung nach wiederholt auftreten. So findet sich der Wert ca. 0,010 dreimal, der Wert 0,015 zweimal; und auch der Wert  $\bar{x}$  für  $\text{Co}_2(\text{SO}_4)_3$  ist wahrscheinlich zu groß und kommt dem Werte für  $\text{NiSO}_4$  vielleicht weit näher (vgl. den unsicheren Wert 0,436 oben in Zeile 24, p. 641 der  $\bar{x} = 0,00444$  geben würde). Man könnte daraus vermuten, daß eben nur gewisse Werte für  $\bar{x}$  möglich sind. Daß die Zahlen nicht vollkommen identisch sind, wäre dem Einfluß des diamagnetischen, nicht metallischen Radikals zuzuschreiben.

Der Einfluß, den z. B. das eintretende Chloratom bei der Oxydation von  $\text{CrCl}_2$  zu  $\text{CrCl}_3$  ausübt, ist ein doppelter. Erstens wird der Atommagnetismus des Cr dadurch verändert, zweitens überlagert sich nun der Diamagnetismus des hinzutretenden Cl-Atoms. Der letztere Einfluß ist offenbar um so größer, je geringer der Molekularmagnetismus des betreffenden Salzes ist. Bei kleinen  $\bar{x}$  wird man also von vornherein eine geringere Übereinstimmung verschiedener Salze mit gleichen Atommagnetismen erwarten können.

3. Die Tatsache der Wiederkehr angenähert desselben Wertes von  $\bar{x}$  in der Tabelle erinnert sofort an die Magnetonentheorie von Weiss, die in Nr. 1 kurz skizziert ist, und ich habe im folgenden die Anzahl der Magnetonen in den Molekülen der einzelnen Salze zu berechnen versucht. Es sei aber

1) Die mit W bezeichneten Daten sind meinen Messungen entnommen. L. u. K. bedeutet Liebknecht und Wills. Auch meinen Daten liegen dabei die absoluten Messungen von Liebknecht und Wills zugrunde.

hier bemerkt, daß die Weiss'sche Theorie zwischen den Werten  $\bar{\chi} = 0,015$  und  $\bar{\chi} = 0,0043$  eine viel größere Zahl von Werten zulassen würde, als in der Reihe der Salze der Eisengruppe vorkommen. Es bleibt also immer noch auffällig, daß gerade diese wenigen Werte  $\bar{\chi}$  sich zu wiederholen scheinen. Es möge gleichwohl untersucht werden, inwieweit die Daten der Tabelle die Weiss'sche Magnetonentheorie bestätigen.

Um nach Weiss die Anzahl der Magnetonen zu berechnen, darf für  $\chi$  in Gleichung (3) nicht der Wert  $\bar{\chi}$ , der Atommagnetismus, in unsere Bezeichnungsweise eingeführt werden, sondern dieser Wert muß noch wegen des Diamagnetismus der anionischen Gruppe korrigiert werden. Es muß also der Atommagnetismus des Metalles im Salz berechnet werden. Nach Langevin besitzt jedes paramagnetische Element auch Diamagnetismus, der durch den Paramagnetismus überdeckt wird. Auch diesetwegen müßte man eine Korrektion anbringen; doch fehlt dazu bisher alle Möglichkeit.

Für die hier in Betracht kommenden anionischen Bestandteile gibt Weiss<sup>1)</sup> (nach Pascal) den diamagnetischen Anteil am Molekularmagnetismus:

$$\text{Cl:} \quad - 21 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{SO}_4: \quad - 38,5 \cdot 10^{-6}.$$

Diese negativen Werte sind also für jedes Radikal Cl oder  $\text{SO}_4$  abzuziehen. Für  $\text{PO}_4$  ist der Wert noch nicht bekannt. Ich habe im folgenden deswegen den Wert von  $\text{SO}_4$  eingesetzt, wozu freilich gar kein Anhaltspunkt vorliegt. Doch kann man sicher annehmen, daß die Größenordnung richtig ist, da alle Säureradikale in der Größenordnung des Diamagnetismus übereinstimmen, und der Fehler die Meßunsicherheit der  $\text{MnPO}_4$ -Lösung kaum überschreitet.

Die Messungen der Atommagnetismen von Liebknecht und Wills, die ich der Berechnung meiner Daten zugrunde gelegt habe, beziehen sich auf eine Temperatur von  $18^\circ$ . Meine relativen Messungen sind bei verschiedenen, aber jeweils für ein reduziertes und das zugehörige oxydierte Salz möglichst bei gleichen Temperaturen ausgeführt, so daß nach dem

1) P. Weiss, l. c. p. 421.

Gesetz von Curie auch meine Daten die Temperatur  $18^\circ$  gültig ist. Dann ist in (4)

$$\sqrt{3 \cdot R \cdot T \cdot 10^{-6}} = 269,43$$

und es wird

$$\sigma_{mo} = 269,43 \cdot \sqrt{\chi \cdot 10^6}.$$

Die folgende Tabelle gibt die Berechnung von  $\sigma_{mo}$  und  $n$  für die reduzierten und oxydierten Salze der Eisengruppe.

	$\bar{\chi}$	$\chi$	$\sqrt{\chi \cdot 10^6}$	$\sigma_{mo}$	$n$
$\text{CrCl}_3$ :	0,00625	0,00631	79,43	21403	19,05
$\text{CrCl}_2$ :	0,01078	0,01082	104,02	28022	24,95
$\text{MnPO}_4$ :	0,01084	0,01088	104,31	28103	25,01
$\text{MnSO}_4$ :	0,01514	0,01518	123,2	33194	29,54
$\frac{1}{2}(\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3)$ :	0,01515	0,01521	123,3	33229	29,58
$\text{FeSO}_4$ :	0,01272	0,01276	113,0	30446	27,10
$\frac{1}{2}\text{Co}_2(\text{SO}_4)_3$ :	0,00186	0,00192	70,14	18899	16,82 <sup>1)</sup>
$\text{CoSO}_4$ :	0,01019	0,01023	101,14	27253	24,26
$\frac{1}{2}\text{Ni}_2(\text{SO}_4)_3$ :	?				
$\text{NiSO}_4$ :	0,00435	0,00439	66,3	17868	15,9

In dieser Tabelle bedeutet  $\chi$  den wegen des Diamagnetismus des Säureradikals korrigierten Wert von  $\bar{\chi}$ . Die drei ersten Salze liefern in der Tat nahezu ganzzahlige Werte für  $n$ , 19 und 25. Bei den übrigen Salzen ist die Übereinstimmung nicht so gut. Die Werte von  $\text{MnSO}_4$  und  $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ , die den Beobachtungen von Liebknecht und Wills entnommen sind, fallen gänzlich heraus.

1) Dieser Wert ist unsicher. Vgl. p. 639. Nr. 1.

(Eingegangen 27. August 1911.)

8. *Über die Schallintensität des tönenden  
Lichtbogens;  
von Wilhelm Rühl.*

(Auszug aus der Göttinger Dissertation.)

Einleitung.

H. Th. Simon beobachtete im Jahre 1897, wie ein Gleichstromlichtbogen, dessen Stromzuführung zufällig von einem Wechselstrome induziert wurde, zu tönen begann. Er zeigte im Anschluß hieran, daß der Lichtbogen überlagerte Wechselströme überraschend getreu in Schallwellen umzuwandeln vermag, so daß man ihn als Telephon von sehr vollkommenen Klangeigenschaften verwenden kann („sprechender Lichtbogen“). Simon<sup>1)</sup> erklärte diese Erscheinung durch die Temperaturschwankungen, die der Wechselstrom durch die variierende Wärmeentwicklung in der Leitungsbahn hervorruft. Diese Temperaturschwankungen haben Dichteänderungen der Lichtbogengase zur Folge, die sich fortpflanzen und unser Ohr als Schallwellen treffen. Später gibt H. Th. Simon<sup>2)</sup> noch eine zweite Möglichkeit der Erklärung: es könnten auch durch die Schwankungen der verdampfenden Kohlenmenge der Elektroden Volumschwankungen der Lichtbogengase auftreten. Beiden Erklärungen gemeinsam ist, daß sie als Ursache die Schwankungen der im Lichtbogen verbrauchten elektrischen Leistung hinstellen; die erste Erklärung zieht die auf die Gasstrecke entfallende Leistung heran, die zweite die dem Anoden- und Kathodenfall entsprechende.

In einer im Anschluß an die Simonsche Veröffentlichung gegebenen Notiz über Thermophonie macht F. Braun<sup>3)</sup> darauf aufmerksam, daß auch feste Leiter, z. B. dünne Metalldrähte,

1) H. Th. Simon, Wied. Ann. **64**, p. 233. 1898.

2) H. Th. Simon, Physik. Zeitschr. **2**, p. 258. 1901.

3) F. Braun, Wied. Ann. **65**, p. 358. 1898.

tönen können, wenn man sie durch einen Gleichstrom heizt und diesem einen Wechselstrom überlagert. Er zeigt auch, daß die Intensität dieses Tönens der Gleichstromstärke proportional sein muß, wofern die Leiter dem Ohmschen Gesetze folgen. Denn ist  $J_0$  der Gleichstrom,  $\delta i$  der übergelagerte Wechselstrom und  $w$  der Widerstand des Leiters, so entwickelt der Gesamtstrom  $J_0 + \delta i$  die Joulewärme

$$(J_0 + \delta i)^2 w = J_0^2 w + 2J_0 \delta i w + \delta i^2 w.$$

Ist  $\delta i$  klein, so darf das dritte Glied vernachlässigt werden, und die Änderung der Wärmeentwicklung wird durch  $2J_0 \delta i w$  dargestellt: sie ist  $J_0$  proportional. Da aber bei dem Lichtbogen von einem konstanten Widerstande nicht die Rede sein kann, so ist die Braunsche Überlegung natürlich nicht auf ihn anwendbar.

Eine andere Erklärung für die Entstehung der Lichtbogentöne versuchte Baumgardt<sup>1)</sup> zu geben, indem er das magnetische Erdfeld, in dem der Bogen brennt, verantwortlich machte. Durch die elektrodynamische Wirkung der Stromfäden aufeinander muß längs der stromdurchflossenen Gassäule eine Art von elastischer Spannung auftreten, die für den Lichtbogen einen möglichst direkten Weg zwischen den Elektroden festzuhalten sucht; denn die einzelnen einander parallelen Stromfäden ziehen einander an. Der Lichtbogen verhält sich also unter dem Einfluß seiner elektrodynamischen Kräfte analog einer gespannten Membran. Wirkt nun eine magnetische Feldstärke senkrecht der Stromrichtung, so wird der Lichtbogen senkrecht dazu abgelenkt, bis die Kraft des Magnetfeldes jener quasielastischen Spannung des Lichtbogens das Gleichgewicht hält. Wird ein Wechselstrom übergelagert, so muß sich diese Gleichgewichtsstellung periodisch verschieben, dies soll nach Baumgardt die Ursache für die Wirkung des tönenden Lichtbogens sein. Ist diese Erklärung richtig, so muß man durch ein Hilfsmagnetfeld die Wirkung beeinflussen können. Da nach entsprechenden Versuchen ein solcher Einfluß nicht statthat, so dürfte diese Erklärung wohl abzulehnen sein. Übrigens müßte sich, wenn sie richtig wäre, auch wohl eine ausgezeichnete Richtung der ausgesandten

1) E. Baumgardt, Elektrotechn. Zeitschr. 22. p. 511. 1901.



Schallwellen nachweisen lassen, sowie eine Richtung, wo durch Interferenzwirkung gar kein Schall zu hören wäre. Von einer derartigen Erscheinung wurde aber bisher nichts beobachtet.

Im Zusammenhang hiermit ist es wichtig zu erwähnen, daß auch das *Licht* eines Gleichstromlichtbogens, dem man einen Wechselstrom überlagert, durch seine Schwankungen die Schwankungen des Wechselstroms sehr getreu abbildet. Daher konnte H. Th. Simon das von dem sprechenden Lichtbogen ausgesandte Licht in wirksamer Weise zur Verbesserung der Bellschen Lichttelephonie heranziehen.<sup>1)</sup> Es zeigte sich dabei, daß die Strahlungsschwankungen im wesentlichen vom positiven Krater ausgehen. Duddell<sup>2)</sup> hat auf einer fallenden photographischen Platte die Lichtschwankungen des tönenden Lichtbogens photographiert. Indem Ruhmer<sup>3)</sup> eine so erhaltene Platte vor einer Selenzelle vorbeizog und dieselbe durch die Platte hindurch belichtete, konnte er die auf der Platte fixierten Töne reproduzieren (Photographophon).

In der vorliegenden Arbeit habe ich es auf Anregung von Hrn. Professor H. Th. Simon unternommen, die Schallwirkungen des tönenden Lichtbogens in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen des Lichtbogens quantitativ zu verfolgen. Denn man wird über die Entstehung der Lichtbogentöne erst dann ein bindendes Urteil abgeben können, wenn man die Gesetze dieses Tönens nach allen Richtungen hin erkannt hat.

Es wurde die Schallintensität des tönenden Lichtbogens gemessen in Abhängigkeit von:

1. Bogenlänge (Elektrodenabstand),
2. Wechselstromstärke,
3. Gleichstromstärke,
4. Kohlenbeschaffenheit.

#### Erster Teil.

##### A. Schallintensitätsmessungen.

Nach Lord Rayleigh wird die Intensität  $S$  einer fortschreitenden Schallwelle an irgend einer Raumstelle durch die

1) H. Th. Simon, Physik. Zeitschr. 2. p. 253. 1901.

2) W. D. Duddell, Physik. Zeitschr. 2. p. 425. 1901.

3) E. Ruhmer, Elektrotechn. Zeitschr. 22. p. 511. 1901.

Energie gemessen, die dort von der Welle durch die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung gestellte Flächeneinheit in der Sekunde hindurchgetragen wird. Für die in einer Zeit  $t$  übertragene Energie ergibt sich allgemein

$$(1) \quad W = \int_0^t p \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt,$$

wo  $p$  der an der betrachteten Stelle herrschende Druck und  $u$  die Verrückung eines Teilchens ist. Nach dem Hookeschen Gesetz ist

$$(2) \quad p = -a^2 \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial x},$$

wo  $\varrho_0$  die Dichte des Mediums an der betrachteten Stelle ist. Ist, wie in einer einfach harmonischen Welle

$$u = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - at),$$

wo  $A$  die Amplitude der Verrückung,  $\lambda$  die Wellenlänge,  $a$  die Schallgeschwindigkeit in dem betrachteten Medium ist, so wird nach Berücksichtigung von (2) die während einer Periode  $T$  übertragene Energie

$$W = \int_0^T a^3 \varrho_0 A^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} (x - at) dt,$$

$$W = \frac{T}{2} a^3 \varrho_0 A^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2,$$

woraus die in der Zeiteinheit übertragene Energie sich ergibt:

$$S = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} a^3 \varrho_0 A^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2.$$

Führen wir die Maximalgeschwindigkeit eines Teilchens  $\bar{w}$  ein, so ist auch, da

$$\bar{w} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{\max}, \quad \bar{w} = \frac{2\pi}{\lambda} a A,$$

$$S = \frac{1}{2} a \varrho_0 \bar{w}^2.$$

Es ergibt sich also, daß die Schallintensität  $S$  proportional  $A^2$ , dem Amplitudenquadrat, und auch proportional  $\bar{w}^2$ , dem Geschwindigkeitsamplitudenquadrat, ist. Man findet in der Literatur auch oft die auf 1 cc m bezogene mittlere räumliche Energiedichte als Schallintensität definiert. Diese geht aus

dem obigen Wert für  $S$  durch Division durch  $a$  hervor, so daß diese räumliche Energiedichte wird:

$$\frac{1}{2} \rho_0 \bar{w}^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} \rho_0 a^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 A^2.$$

Zur Messung der Schallintensität wurde die Methode der Rayleighschen Scheibe benutzt.

Lord Rayleigh hat gezeigt, daß eine Scheibe, die drehbar in den Strahlengang der Schallwellen hineingehängt wird, sich senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Schallwellen zu stellen sucht. Die Wirkung kommt durch die in einer Schallwelle vorhandene Gas- oder Flüssigkeitsbewegung zustande. W. König<sup>1)</sup> hat die Theorie dieser Rayleighschen Scheibe entwickelt, indem er das Drehungsmoment berechnet, das ein abgeplattetes Rotationsellipsoid in einer strömenden reibungslosen Flüssigkeit erfährt. Nach W. König ist dieses Drehungsmoment  $M$  für ein Rotationsellipsoid:

$$M = C w^2 \sin 2\vartheta,$$

wo  $C$  eine vom strömenden Medium und den Maßen des Rotationsellipsoides abhängige Konstante,  $w$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung und  $\vartheta$  der Winkel zwischen der Rotationsachse des Ellipsoides und der Strömungsrichtung ist (vgl. Fig. 1). Da die Wirkung  $M$  dem Quadrat von  $w$



Fig. 1.

proportional ist, so müssen auch die hin- und hergehenden Bewegungen der Schallwellen eine Richtkraft auf die Scheibe ausüben, deren Mittelwert  $M$

$$M = C \bar{w}^2 \sin 2\vartheta,$$

wo  $\bar{w}$  die Maximalgeschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung ist.

1) W. König, Wied. Ann. 43. p. 49. 1893.

W. Zernow<sup>1)</sup> hat auf Anregung von Professor Lebedew diese Theorie experimentell geprüft durch absolute Messung des ausgeübten Drehungsmomentes. Seine Messungen bestätigen vollkommen die Richtigkeit der Königschen Formeln für Rotationsellipsoide.

Da eine irgendwie gestaltete Scheibe stets in Annäherung als Rotationsellipsoid aufgefaßt werden kann, so gilt die Königsche Theorie auch für die Rayleighsche Scheibe. Die Theorie zeigt dann, daß das Drehungsmoment am größten wird, wenn  $\vartheta = 45^\circ$ . Man wird demnach am zweckmäßigsten stets in dieser empfindlichsten Stellung beobachten.

Stellt man also eine solche Scheibe unter  $45^\circ$  geneigt in den Weg einer fortschreitenden Schallwelle, so wird sie ein Drehungsmoment erfahren, das proportional  $w^2$ , dem Geschwindigkeitsamplitudenquadrat ist. Da aber auch die Schallintensität, wie wir oben sahen, proportional  $w^2$  ist, so mißt das auf die Scheibe ausgeübte Drehungsmoment direkt die Schallintensität. Das Drehungsmoment wird dadurch ermittelt, daß man die Scheibe an einem Torsionsfaden aufhängt. In diesem Falle ist der eintretende stationäre Ausschlag ein direktes Maß für die Schallintensität.

In der vorliegenden Arbeit konnte aus weiter unten dargelegten Gründen die Scheibe nicht direkt in den Gang der fortschreitenden Schallstrahlen gestellt werden. Es erwies sich vielmehr als nötig, das Instrument in ein Resonanzrohr zu setzen, vor dessen Öffnung die Schallquelle aufgestellt wurde, die nun in dem Rohre stehende Wellen erzeugte. Wenn die Schallquelle Wellen erregt, so muß sich in der Resonanzröhre mit der Zeit ein stationärer Zustand einstellen, der dadurch charakterisiert ist, daß die Schallquelle genau so viel Energie nachliefert, als durch die dämpfenden Ursachen in dem Rohr verloren geht. Nun lehrt die Theorie der erzwungenen Schwingungen, daß die Amplitude der entstehenden Resonanzschwingung der schwingenden Luft proportional der Amplitude der erregenden Schwingung ist. Es muß also in diesem Falle der Ausschlag des Instrumentes, der die Amplitude der Resonanzschwingung mißt, proportional der von der Schallquelle gelieferten Schallintensität sein.

1) W. Zernow, Ann. d. Phys. 26. p. 79. 1908.

## B. Versuchsanordnung.

## 1. Phonometer.

Die Rayleighsche Scheibe wurde von Grimsehl<sup>1)</sup> und Lebedew<sup>2)</sup> zu relativen Schallintensitätsmessungen benutzt; Lebedew nahm statt der Scheibe einen rechteckigen Spiegel und bildete das Instrument technisch zu einem Phonometer von hoher Vollendung aus. Nach den von ihm in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellten Konstruktionsangaben wurde das in vorliegender Arbeit benutzte Instrument in der Werkstätte des Instituts gebaut.

Es besteht im wesentlichen (vgl. Fig. 2) aus einem rechteckigen Spiegel, der an einem äußerst dünnen Quarzfaden aufgehängt ist. Der Spiegel ( $15 \times 3$  mm) ist auf einen dünnen Aluminiumdraht aufgekittet, der an dem Quarzfaden befestigt ist. An seinem unteren Ende trägt der Aluminiumdraht eine kleine Aluminiumfahne ( $5 \times 3$  mm), die in einer besonderen kleinen Kammer schwingt und zur Dämpfung dient. Die Wände dieser Kammer sind zur Vermeidung von Wirkungen des Voltaeffekts mit Aluminiumfolie ausgekleidet.

Der Spiegel hängt frei im Wege der Schallstrahlen, der obere Teil des Instrumentes wird

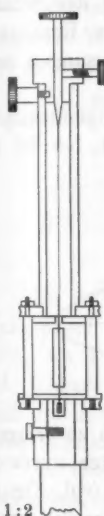


Fig. 2.

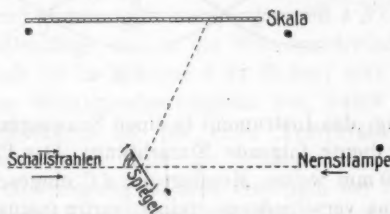


Fig. 3.

durch vier Messingsäulchen getragen. Die Ablesung geschieht mittels Nernstlampe und Skala (vgl. Fig. 3).

1) E. Grimsehl, Wied. Ann. 34. p. 1023. 1888.

2) P. Lebedew, Wied. Ann. 62. p. 163. 1897.

Zunächst wurde versucht, die vom tönenden Lichtbogen ausgehenden Schallwellen dadurch zu messen, daß man das Instrument in der Nähe des Lichtbogens aufstellte, ähnlich etwa, wie man durch ein Flächenbolometer die Strahlungsintensität einer Lichtquelle bestimmt. Dieser Weg erwies sich aber als nicht gangbar. Die Schallwellen nämlich, die von dem tönenden Lichtbogen ausgehen, werden an den Wänden des Zimmers reflektiert und bilden so stehende Wellen, deren Knoten und Bäuche bei den geringsten Schwankungen der Tonhöhe, die sich nie vermeiden lassen, im Raum hin und her wandern. Da aber das Phonometer im Raum feststeht, ist die Schallintensität, die es anzeigt, zeitlich verschieden, es kann keine ruhige Einstellung erzielt werden.

Es wurde daher auf eine absolute Messung der Schallintensität verzichtet und die oben beschriebene Resonanzmethode angewandt, die wenigstens relative Messungen einwandfrei gestattete.

Da die Schallbewegung die größte Geschwindigkeitsamplitude im Bauch der stehenden Welle entwickelt, so ist es

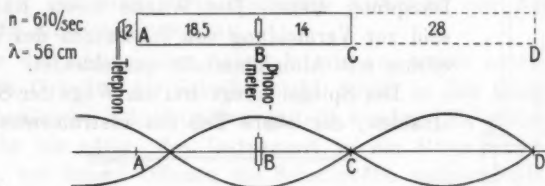


Fig. 4.

wichtig, das Instrument in einen Schwingungsbauch zu bringen. Dazu diente folgende Einrichtung: Das Phonometer wurde in ein 50 mm weites Messingrohr AC eingeschlossen (vgl. Fig. 4), das aus verschiedenen, teleskopartig ineinander verschiebbaren Teilen bestand. Am Ende C wurde das Rohr durch eine Glasscheibe verschlossen, so daß dort stets ein Schwingungsknoten liegen mußte. Durch diese Scheibe hindurch fiel das Licht der Nernstlampe auf den Spiegel des Phonometers und gelangte durch ein seitlich angebrachtes Rohrfenster auf die Skala. Als Schallquelle diente ein Telephon, das durch den Strom einer Hochfrequenzwechselstrommaschine erregt wurde. Es

wurde in einem Abstand von 2 cm vor dem offenen Rohrende  $A$  aufgestellt und nun bei einer bestimmten Frequenz des Telephonstromes die Länge des Rohres so lange variiert, bis ein maximaler Ausschlag des Phonometers erhalten wurde. Unter Festhaltung der Gesamtrohrlänge  $\overline{AC}$  wurden nun die relativen Längen  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  so lange verändert, bis wiederum ein Maximum des Phonometerausschlages zustande kam. Als dann befand sich das Phonometer bestimmt im Schwingungsbauch. Bei diesen Versuchen ergab sich, daß die Entfernung  $\overline{AB}$  keineswegs genau gleich  $2 \overline{BC}$  war, sondern kürzer, daß also die Reflexion der Schallwellen nicht genau am offenen Ende, sondern in einem gewissen Abstände sogar noch hinter der Telephonmembran zu erfolgen scheint.

Bei verschiedenen Tonhöhen  $n$  ergaben sich z. B. die folgenden Werte für die Längen der beiden Teile  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  des Resonanzrohres:

Perioden $n$	$\overline{AB}$ cm	$\overline{BC}$ cm	$4 \overline{BC} n$ m/sec	Ton
345	37,2	24,8	342	$f_1$
610	18,5	14	341	$dis_1$
740	15,8	11,5	340	$f_{s_2}$
810	14,2	10,5	340	$gis_2$
im Mittel 340,8				

Da  $4 \overline{BC} = \lambda$  sein muß, wenn das Phonometer im Schwingungsbauch steht, und andererseits  $\lambda = a/n$ , so muß  $4 \overline{BC} n = a$  sein, wo  $\lambda$  die Wellenlänge und  $a$  die Schallgeschwindigkeit ist. Dieser Ausdruck ist in Kolonne 4 zu finden; man sieht, daß im Mittel eine Schallgeschwindigkeit von 340,8 m/sec herauskommt. Andererseits ist bei einer Temperatur von  $17^\circ$  in einem 50 mm weiten Rohr die Schallgeschwindigkeit 340 m/sec, die Übereinstimmung ist also innerhalb der Fehlergrenzen gut. Verlängerte man das Rohr bei  $C$  noch einmal um die Länge  $\overline{CD} = 2 \overline{BC}$ , also um eine halbe Wellenlänge, so blieb alles unverändert, ein Beweis für die Richtigkeit der getroffenen Anordnung.

## 2. Schallquelle.

Die Schallquelle war der tönende Lichtbogen. Er brannte zwischen zwei Kohlen, die in ein mit der Hand regulierbares



Stativ eingespannt waren. Um die Störungen zu vermeiden, die von den Zimmerwänden zurückgeworfene Wellen auch hier noch auf die Schwingungen des Resonanzrohres äußern konnten, wurde der Lichtbogen in ein vertikales Messingrohr von 50 mm Durchmesser und 190 mm Länge eingeschlossen, welches in der Mitte, dem Lichtbogen gegenüber, eine kreisrunde Öffnung von 13 mm Durchmesser hatte. Eine kleine Verrückung des Lichtbogens aus der Mitte des Rohres bis zu 3 mm hatte auf

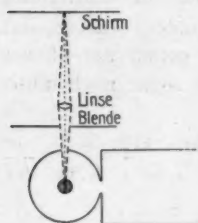


Fig. 5.

den Ausschlag des Phonometers keinen Einfluß. Um jederzeit dieselbe Stellung des Lichtbogens zu erreichen, und um seine Länge genau messen zu können, wurde durch eine Linse auf einem Schirm von Millimeterpapier ein etwa 6 mal vergrößertes, reelles Bild des Lichtbogens entworfen. Die Lichtbogenlänge ließ sich so auf 0,1 mm genau messen. Das vertikale Rohr war zu diesem Zweck mit einem seitlichen Glimmerfenster versehen.

Als Kohlematerial wurden Homogenkohlen und Dochtkohlen von Gebr. Siemens in verschiedenen Stärken verwendet.

Es wurden Versuche angestellt, ob die horizontale oder vertikale Lage des Lichtbogens zweckmäßiger wäre. Bei horizontaler Lage brennt aber der Lichtbogen stark nach oben, und die Länge des Lichtbogens schwankt bei festem Kohlenabstand andauernd. Dadurch wurden die Ausschläge des Phonometers sehr inkonstant. Es wurde also stets die vertikale Lage des Lichtbogens angewandt.

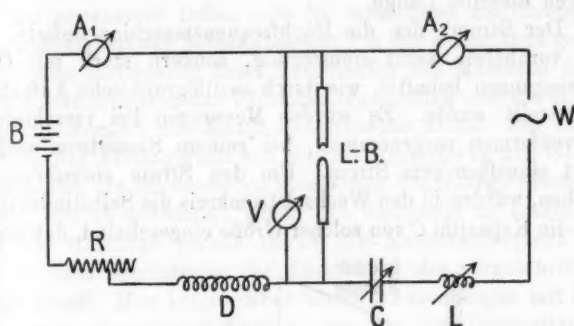
### 3. Schaltung.

Die meist verwendete Schaltung zeigt nachstehende Skizze (vgl. Fig. 6).

Die Drosselspule *D* verhinderte den Wechselstrom durch den Gleichstromkreis zu fließen. Die Kapazität *C* hindert den Gleichstrom durch den Wechselstromkreis zu fließen. Selbstinduktion und Kapazität sind variabel, um den Wechselstrom sinusförmig zu machen. Den Wechselstrom liefert eine Hochfrequenzwechselstrommaschine, die bis 900 Perioden gibt. Um möglichst konstante Tourenzahl zu erreichen, wurde der Motor,



der die Maschine trieb, nicht mit der städtischen Netzspannung (440 Volt), sondern mit 150 Volt Batteriespannung betrieben. Aber selbst dann zeigte sich, daß es unmöglich sei, die Maschine genau auf die Maximalfrequenz, d. h. auf diejenige Tourenzahl einzuregulieren, die dem Maximalausschlag des Phonometers bei bestimmter Länge des Resonanzrohres ent-



- |     |                            |                |                             |
|-----|----------------------------|----------------|-----------------------------|
| B   | 150 Volt Batteriespannung. | A <sub>1</sub> | Amperemeter.                |
| R   | Vorschaltwiderstand.       | A <sub>2</sub> | Hitzdrahtamperemeter.       |
| D   | Drosselspule.              | C              | Kapazitätsvariometer.       |
| L-B | Lichtbogen.                | L              | Selbstinduktionsvariometer. |
| V   | Voltmeter.                 | W              | Hochfrequenzmaschine.       |

Fig. 6.

sprach. Infolgedessen wurde folgendes Verfahren eingeschlagen, um den der Resonanz entsprechenden Ausschlag zuverlässig zu erhalten.

Die Maschine wurde erst so schnell laufen gelassen, daß ihre Frequenz gerade etwas höher war als die Resonanzfrequenz, dannn wurde plötzlich ein Widerstand in den Ankerstromkreis der Maschine eingeschaltet, oder ein Teil des Feldwiderstandes des Motors kurz geschlossen. Dann sank die Tourenzahl und mit ihr die Tonhöhe langsam über den Resonanzpunkt hinab, und man konnte bequem den Umkehrpunkt des Bildes auf der Skala ablesen. Dies Verfahren gab immer dieselben Umkehrpunkte, wenn nur der eingeschaltete bzw. kurzgeschlossene Widerstand genügend klein war, so daß die Geschwindigkeitsänderung langsam genug erfolgte. Zum ge-

naunen Messen der jeweiligen Frequenz der Maschine diente ein Frequenzmesser von Hartmann & Braun, der an den Wechselstromschleifringen des Maschinenmotors lag.

Die endgültigen Messungen wurden alle bei derselben Tonhöhe von 360 Schwingungen/sec, also etwa beim Tone  $f_{a_1}$  vorgenommen. Das Resonanzrohr hatte also bei allen Messungen dieselbe Länge.

Der Strom, den die Hochfrequenzmaschine lieferte, war von vornherein nicht sinusförmig, sondern stark mit Oberschwingungen behaftet, wie durch oszillographische Aufnahmen festgestellt wurde. Es wurden Messungen bei verschiedenen Kurvenformen vorgenommen, bei reinem Sinusstrom und bei nicht sinusförmigem Strom. Um den Strom sinusförmig zu machen, wurden in den Wechselstromkreis die Selbstinduktion  $L$  und die Kapazität  $C$  von solcher Größe eingeschaltet, daß für die

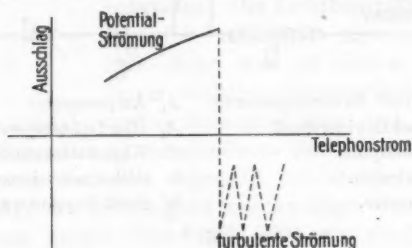


Fig. 7.

in Frage kommende Frequenz (360 Perioden) Resonanz herrschte. Die Oszillogramme zeigten dann reinen Sinusstrom. Resonanz trat ein bei  $C = \text{ca. } 10 \text{ Mikrof.}$  und  $L = \text{ca. } 19 \text{ Millihenry.}$

Erregt man die Phonometeranordnung mit Telephon und steigert dessen Stromstärke allmählich, so beobachtet man die in der vorstehenden Fig. 7 dargestellten Ausschläge des Phonometers.

Bei einer bestimmten Schallintensität beginnen die Ausschläge unstabil zu werden, sie schwanken in weiten Grenzen hin und her, und es besteht offenbar das Bestreben, den Spiegel parallel zur Längsrichtung des Rohres zu stellen. Dies erklärt sich wohl so: solange die Intensität der Schallquelle nicht über einen gewissen Betrag geht, bleiben die Bedingungen

erfüllt, die für die Wirkungsweise der Rayleighschen Scheibe maßgebend sind, d. h. die Strömung ist wirbelfrei (Potentialströmung). Über eine gewisse Intensität hinaus aber bildet sich eine turbulente Strömung aus, wohl veranlaßt durch die Wände des Rohres und die im Wege stehenden Teile des Phonometers, wie z. B. die erwähnten Messingsäulchen.

Am genauesten ließen sich die Messungen ausführen, die die Abhängigkeit der Schallintensität von der Bogenlänge gaben, indem man gleichzeitig beim Durchlaufen der Maschine durch die Resonanzfrequenz den Phonometerausschlag und die Bogenlänge im Moment des Maximalausschlages ablas. Bei Untersuchung der Abhängigkeit von Wechselstromstärke und Gleichstromstärke, die bei derselben konstanten Bogenlänge geschehen mußte, war es schwierig, genau den Zeitpunkt zu treffen, in dem die Maschine gerade durch die Resonanzfrequenz lief, und in dem gleichzeitig der Lichtbogen die vorgeschriebene Länge besaß. Man konnte aber kleine Abweichungen mit Hilfe der zuerst gemessenen Kurven, die die Schallintensität als Funktion der Bogenlänge gaben, korrigieren und nahm im übrigen immer Mittelwerte aus einer Anzahl Ablesungen.

#### 4. Messungen.

##### a) Variation der Bogenlänge.

Es wurde zunächst bei konstant gehaltenem Gleichstrom und konstantem Wechselstrom die Bogenlänge variiert (Blatt 1). Der Wechselstrom wurde durch geeignete Wahl von Selbstinduktion und Kapazität sinusförmig gemacht. Der Gleichstrom betrug bei allen diesen Messungen 3,0 Amp., der Wechselstrom wurde variiert zwischen 0,2 A<sub>eff.</sub> und 1,5 A<sub>eff.</sub> Auf Blatt 1 sind als Abszissen die Bogenlängen in Millimeter, als Ordinaten die abgelesenen Ausschläge eingetragen.

Die Kurven zeigen eine rein quadratische Abhängigkeit der Schallintensität  $S$  von der Bogenlänge  $l$  von der Form:

$$S = Al^2,$$

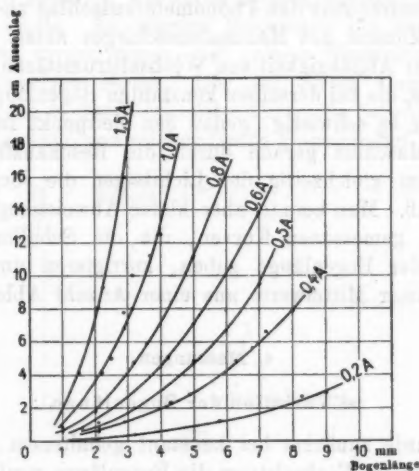
wo  $A$  eine Konstante ist; die gemessenen Kurven schmiegen sich sehr genau Parabeln an.

Ist der Wechselstrom nicht sinusförmig, so ergeben sich andere Kurven. Diese steigen steiler an, sie lassen sich analytisch darstellen durch ein Gesetz:

$$S = A l^2 + B l^3$$

$$= A l^2 \left( 1 + \frac{B}{A} l \right).$$

Der Faktor  $B/A$  ist für nicht zu starke Wechselströme, etwa unter  $1 A_{\text{eff}}$  klein gegen 1, so daß für kleine Bogenlängen auch hier im wesentlichen ein quadratisches Gesetz gilt. Mit



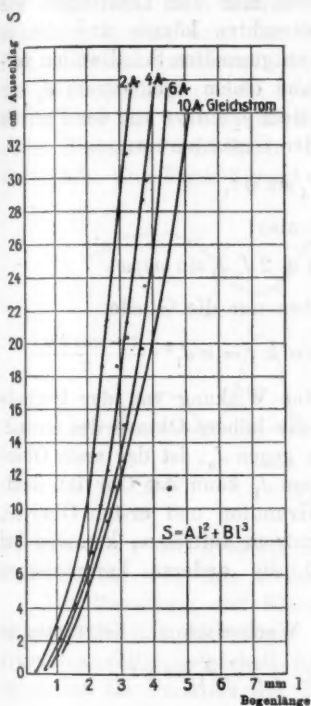
+ oben Dochkohle 8 mm,  
 - unten Homogenkohle 6 „  
 Gleichstrom const. 3,0 A. Wechselstrom sinusförmig.

Blatt 1.

wachsender Bogenlänge aber und wachsendem Wechselstrom wird der Anteil der Oberschwingungen, die Obertöne erzeugen, größer, und da das Phonometer alle geraden Obertöne summiert, so ist der Ausschlag des Instrumentes dann größer. Infolge der Anordnung nämlich, daß das Phonometer im Bauch der Grundschwingung steht, kann es nur die geradzahligen Obertöne, also den zweiten, vierten usw. messen, während der erste, dritte und alle ungeraden Obertöne gerade dort, wo das

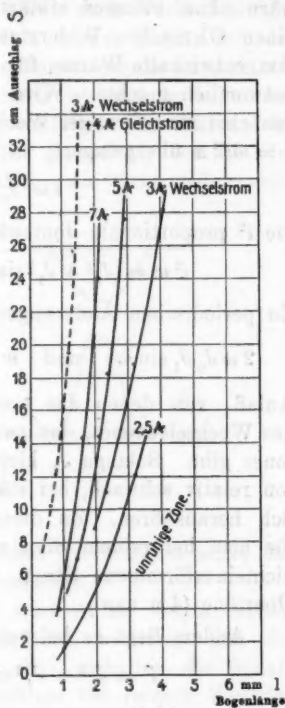
Phonometer steht, einen Schwingungsknoten haben und also auf den Spiegel kein Drehungsmoment ausüben können.

Blatt 2a zeigt dieselben Kurven wie Blatt 1, nur bei konstantem (nicht sinusförmigem) Wechselstrom 1,5 A<sub>eff</sub> und variablem Gleichstrom zwischen 2,0 Amp. und 10,0 Amp. Man



+ oben Dochkohle  
- unten Homogenkohle } 8 mm.  
Wechselstrom (nicht sinusförmig)  
const. 1,5 A<sub>eff</sub>.

Blatt 2.



+ oben Dochkohle  
- unten Homogenkohle.  
Reiner Wechselstrom.

sieht aus diesen Kurven, daß die Schallintensität bei stärkerem Gleichstrom *schwächer* ist, entgegen der oben erwähnten Folgerung, die Braun für tönende Leiter gezogen hat.

Läßt bei man festgehaltener Wechselstromstärke den Gleichstrom immer schwächer und schwächer werden, so bemerkt man, daß mehr und mehr neben dem Grundton die höhere Oktave auftritt. Schaltet man den Gleichstrom plötzlich ganz aus, so springt der Ton in die Oktave über. Dieses Verhalten wäre ohne weiteres erklärt, wenn man den Lichtbogen wie einen Ohmschen Widerstand betrachten könnte und die in ihm entwickelte Wärme für die ausgesandten Schallwellen verantwortlich machte. Wird alsdann einem Gleichstrom  $J_0$  ein zunächst sinusförmiger Wechselstrom  $J_1 \sin \omega t$  von der Periode  $n = \omega/2\pi$  übergelagert, so ist der Gesamtstrom:

$$i = J_0 + J_1 \sin \omega t,$$

die  $i^2$  proportionale Joulewärme also:

$$i^2 w = (J_0^2 + J_1^2 \sin^2 \omega t + 2 J_0 J_1 \sin \omega t) w.$$

Zu periodischen Änderungen geben nur die Glieder

$$2 w J_0 J_1 \sin \omega t \quad \text{und} \quad w J_1^2 \sin^2 \omega t = w J_1^2 \cdot \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2}$$

Anlaß, von denen das erste eine Wirkung von der Periode des Wechselstromes, das zweite die höhere Oktave des Grundtones gibt. Solange  $J_1$  klein ist gegen  $J_0$ , ist der erste Oberton relativ schwach, bei stärkerem  $J_1$  kann das Ohr ihn deutlich heraushören. Zu diesem Grundton und ersten Oberton, die also bei reinem Sinuswellenstrom auftreten, kommen bei nichtsinusförmigem Strom noch die anderen harmonischen Obertöne ( $4\omega$  usw.).

Anders liegt es bei reinem Wechselstrom. Setzt man in

$$i^2 = J_0^2 + J_1^2 \sin^2 \omega t + 2 J_0 J_1 \sin \omega t$$

$J_0 = 0$ , so bleibt nur

$$J_1^2 \sin^2 \omega t = \frac{J_1^2}{2} - \frac{J_1^2}{2} \cos 2 \omega t,$$

also ein Glied, das nur den ersten Oberton geben würde.

Nun sahen wir aber schon früher, daß der Lichtbogen sich ganz anders verhält als ein Ohmscher Widerstand, so daß die eben gegebene Überlegung im besten Falle eine Veranschaulichung geben kann. Wir werden später sehen, wie das beobachtete Verhalten seine strenge Erklärung finden kann.

Verwendet man bei dem beschriebenen Versuche mit reinem Wechselstrom zwei Homogenkohlen oder zwei Dochkohlen, so bleibt der erste Oberton dauernd rein bestehen. Nimmt man dagegen oben eine Dochkohle, unten eine Homogenkohle oder umgekehrt, so ist anfangs der erste Oberton auch rein, nach kurzer Zeit aber, nach Verlauf einiger Sekunden kommt dann der Grundton wieder hinzu, mit der Zeit an Stärke gewinnend. Dies ist leicht daraus zu erklären, daß der Lichtbogen nicht symmetrisch ist und in bekannter Weise eine Art von Ventilwirkung entfaltet. Er läßt in der einen Richtung den Strom leichter passieren, wie in der anderen.<sup>1)</sup> Die Figur 8 zeigt deutlich, wie dann jede zweite

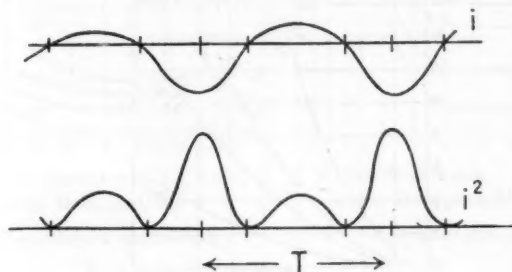


Fig. 8.

Periode von  $i^2$  mit größerer Intensität hervortreten muß, daß sich also der Grundton wieder überlagert.

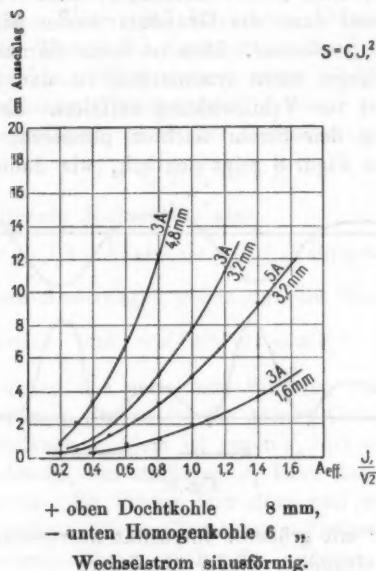
Die Messungen auf Blatt 2b wurden mit einem solchen unsymmetrischen Lichtbogen ausgeführt, nachdem sich der Grundton völlig entwickelt hatte. Sie enthalten die Schallintensität als Funktion der Bogenlänge bei reinem Wechselstrom, der zwischen  $2,5 A_{eff.}$  und  $7,0 A_{eff.}$  variiert. Wird der Wechselstrom kleiner als  $2,5 A_{eff.}$ , so brennt der Bogen unruhig, und Messungen sind nicht mehr möglich.

#### b) Variation der Wechselstromstärke.

Die Schallintensität bei konstanter Lichtbogenlänge und konstanter Gleichstromstärke als Funktion der Wechselstrom-

1) H. Th. Simon, Phys. Zeitschr. 6. p. 317. 1905.

stärke zeigt Blatt 3. Die Bogenlänge wurde variiert zwischen 1,6 mm und 4,8 mm, der Wechselstrom zwischen 0,2 A<sub>eff.</sub> und 1,6 A<sub>eff.</sub> Wird die Wechselstromkomponente noch stärker gemacht, etwa größer als 2 A<sub>eff.</sub>, bei 3 Amp. Gleichstrom, so wird der Lichtbogen sehr unruhig und verlöscht schließlich.



Blatt 3.

Die Kurven sind Parabeln, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen, also von der Form:

$$S = C J_1^2,$$

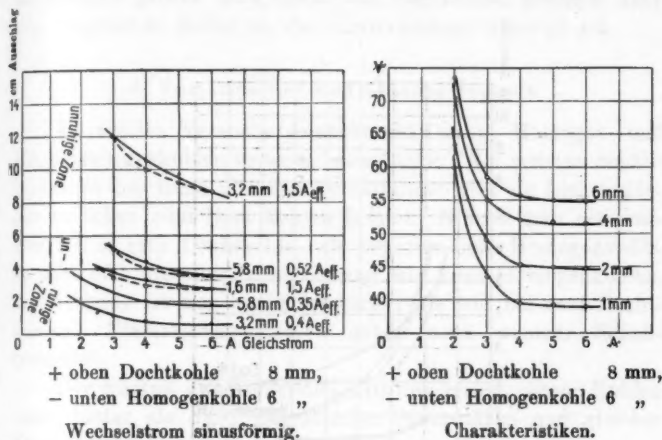
wo  $J_1$  der Scheitelwert des Wechselstromes ist; die Schallintensität ist also dem Quadrate des überlagerten Wechselstromes proportional.

Bei nichtsinusförmigem Strom liegen die Kurven höher, d. h. zu gleichem Wechselstrom gehört eine größere Schallintensität. Der Grund für diese Erscheinung ist natürlich auch hier wieder das Auftreten der höheren Obertöne.



## c) Variation der Gleichstromstärke.

Es wurde weiter die Schallintensität als Funktion der Gleichstromstärke bei konstantem Wechselstrom und konstanter Lichtbogenlänge gemessen. Blatt 4 zeigt das Resultat für sinus-



Blatt 4.

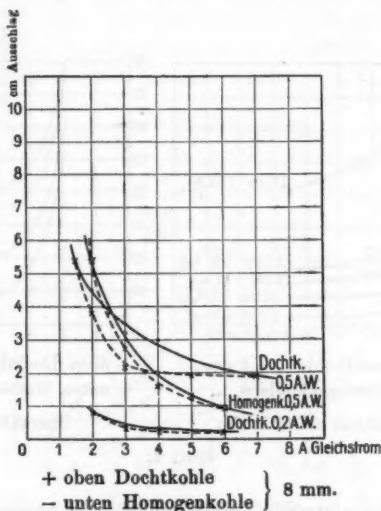
förmigen Wechselstrom. Der Wechselstrom variiert von 0,4 A<sub>eff</sub> bis 1,5 A<sub>eff</sub>; die Bogenlänge variiert von 1,6—5,8 mm.

Blatt 5 gilt für nicht sinusförmigen Strom. Die Kurven liegen durchweg höher als die zugehörigen auf Blatt 4 und zeigen so wieder den Einfluß der Obertöne.

Man sieht, wie mit *abnehmendem* Gleichstrom die Schallintensität wächst. Wird der Gleichstrom unter eine gewisse Grenze, 2—2,5 Amp., geschwächt, so beginnt der Lichtbogen zu „tanzen“, und genaue Messungen sind unmöglich. Schließlich, bei weiterer Schwächung reißt der Lichtbogen ab, sofern nicht der Wechselstrom allein ihn bei dieser Bogenlänge unterhalten kann.

Auf den ersten Blick bemerkt man die Ähnlichkeit der gemessenen Kurven mit der statischen Charakteristik des Lichtbogens. Um näher zu untersuchen, inwieweit die Schallintensitätskurve mit ihr in Beziehung stehen möchte, wurden

von den betreffenden Lichtbögen für die verschiedenen Bogenlängen die statischen Charakteristiken, d. h. die Spannung am Lichtbogen als Funktion der Stromstärke, aufgenommen. Es erwies sich als zweckmäßig, bei konstantem Gleichstrom die Spannung am Lichtbogen und gleichzeitig die Bogenlänge ab-



Wechselstrom nicht sinusförmig.  $U = 7,7$  Mikrof.

Bogenlänge const. 8,2 mm.

Blatt 5.

zulesen, aus diesen Kurven erhält man dann leicht die Charakteristiken. Blatt 4 zeigt eine Reihe Charakteristiken für einen Lichtbogen zwischen einer 8 mm-Docht- und 6 mm-Homogenkohle. Die in Betracht kommenden Charakteristiken sind nun zum Vergleich in die Schallintensitätskurven auf Blatt 4 und Blatt 5 gestrichelt in einem passenden Ordinatenmaßstab eingetragen, so daß man die mehr oder minder gute Annäherung beider Kurven sehen kann.

Schlechte Annäherung zeigt besonders eine Kurve auf Blatt 5, die für zwei Dochkohlen gilt bei  $0,5 A_{\text{eff}}$ . Darunter ist eine Kurve für  $0,2 A_{\text{eff}}$  gezeichnet, die sich bedeutend

besser der Charakteristik anschmiegt. Es ist ja auch von vornherein klar, daß nur bei kleinen Wechselstromamplituden die statische Charakteristik näherungsweise das Verhalten des Lichtbogens wiedergeben kann. Bei Dochtkohlen werden auch deshalb die Verhältnisse nicht so rein sein, weil, wenn der Lichtbogen größer wird, nicht nur der Docht, sondern auch die umgebende Kohle an der Kraterbildung beteiligt ist.

#### d) Variation der Kohlebeschaffenheit.

Es wurden Versuche gemacht mit Docht-, Homogen- und Flammenbogenkohlen verschiedener Dicke. Am meisten Schallintensität bei sonst gleichen Verhältnissen gibt ein Lichtbogen, der zwischen zwei Dochtkohlen brennt. Nimmt man als positive Kohle eine Dochtkohle, als negative eine Homogenkohle, so gibt dies dieselbe Schallwirkung wie zwei Homogenkohlen, die Wirkung ist nur wenig schwächer als wie bei zwei Dochtkohlen. Flammenbogenkohlen geben noch weniger Schallintensität.

Der Einfluß der Kohlendicke ist nur gering, dünne Kohlen tönen lauter als dicke bei gleicher Stromstärke und gleicher Bogenlänge.

#### Zweiter Teil.

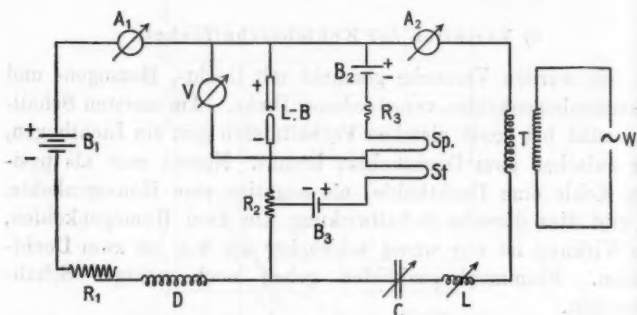
Es ist oben mehrfach darauf hingewiesen worden, daß es nicht angeht, die Leitungseigenschaften des Lichtbogens dadurch zu beschreiben, daß man ihm, wie einem metallischen Leiter, einen Widerstand zuschreibt. Vielmehr lassen sich diese Eigenschaften streng nur durch die Betrachtung der Charakteristik übersehen. Insofern es sich dabei um Wechselstromvorgänge handelt, kommt, wie H. Th. Simon<sup>1)</sup> gezeigt hat, eine Charakteristik in Betracht, die von der Gleichstromcharakteristik in recht komplizierter Weise abweicht, die dynamische Charakteristik. Daher erwies es sich als notwendig, zu dem in der vorliegenden Arbeit untersuchten tönenden Lichtbogen die dynamischen Charakteristiken aufzunehmen und die durch sie zum Ausdruck gebrachten elek-

1) H. Th. Simon, Physik. Zeitschr. 6. p. 297. 1905.

trischen Eigenschaften für die weiteren Betrachtungen heranzuziehen.

### 1. Versuchsanordnung.

Die Charakteristiken wurden in der üblichen Weise mit Hilfe eines Duddellschen Hochfrequenzoszillographen aufgenommen. Die Figur 9 zeigt das Schaltungsschema:



$B_1$  220 Volt Netzspannung.

$B_2, B_3$  Batterien.

$A_1$  Amperemeter.

$A_2$  Hitzdrahtamperemeter.

$V$  Voltmeter.

$L-B$  Lichtbogen.

$D$  Drosselspule.

$R_1, R_2, R_3$  Widerstände.

$C$  Kapazitätsvariometer.

$L$  Selbstinduktionsvariometer.

$T$  Transformator.

$W$  Hochfrequenzmaschine.

$Sp$  Spannungsschleife.

$St$  Stromschleife des Oszillographen.

Fig. 9.

Da es sich um die Messung von sogenannten Wellenströmen handelt, es aber nur auf den Wechselstromanteil ankam, so wurden die Gleichstromkomponenten sowohl in der Strom- als auch in der Spannungsschleife kompensiert, um die volle Empfindlichkeit des Apparates für die Messung des Wechselstromanteils ausnutzen zu können. Diese Kompensation geschah durch zwei vor die Stromschleife bzw. Spannungsschleife geschaltete Batterien  $B_2, B_3$ , die einen Gleichstrom liefern, der dem zu kompensierenden das Gleichgewicht hält. Die Widerstände  $R_2$ , von dem man den Strom abzweigt, und  $R_3$  vor der Spannungsschleife mußten induktionsfrei sein. Kapazität und Selbstinduktion wurden so gewählt, daß der Strom

sinusförmig wurde, wie bei den früheren Messungen. Dann war, wie auch die Oszillogramme zeigten, die Spannung am Lichtbogen nicht völlig sinusförmig, sie kommt aber, solange wir uns auf kleine Amplituden beschränken, dem sinusförmigen Verlauf genügend nahe.

Die Eichung geschah folgendermaßen: Da die an der Spannungsschleife liegende Gleichspannungskomponente des Lichtbogens in dem Maße, wie der Lichtbogen abbrennt, zunimmt, die zur Kompensation benutzte Batterie  $B_2$  indessen eine konstante Spannung gibt, so verschiebt sich mit der Zeit die von der Spannungsschleife des Oszillographen gegebene Spannungskurve über das photographische Papier, senkrecht zu dessen Bewegungsrichtung. Wenn die Gleichspannungskomponente genau kompensiert ist, so muß die Symmetrieachse der Spannungskurve mit der vom Nullspiegel aufgezeichneten Nulllinie zusammenfallen, ist dies aber nicht der Fall, so gibt uns, wenn in einem bestimmten Augenblick exponiert wird, die Lage der Spannungskurve, die in diesem

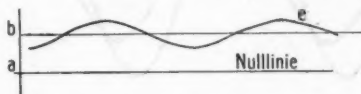
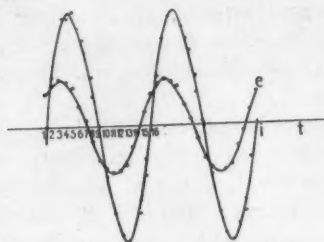


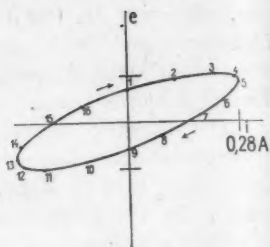
Fig. 10.

Moment fixiert wird, ein Mittel zur Messung der Spannungsamplitude in folgender Weise. Wie die Fig. 10 lehrt, muß sein: der Abstand  $a b$  gleich der Differenz Lichtbogenspannung-vorgeschalteter Batteriespannung. Kennt man diese beiden Größen durch Ablesung am Voltmeter  $V$ , so braucht man nur in dem Oszillogramm die Symmetrieachse der Spannungskurve zu zeichnen und deren Abstand von der Nulllinie zu messen, um die Eichung auszuführen. Die beiden Ablesungen am Voltmeter konnten auf 0,1 Volt genau geschehen, so daß das Verfahren sich als genügend genau erwies. Es ist natürlich nur dann anwendbar, wenn die Spannungskurve sinusförmig oder beinahe sinusförmig ist, so daß man die Symmetrieachse mit genügender Genauigkeit zeichnen kann. Die Eichung der Stromschleife geschah durch direkte Ablesung am Hitzdrahtamperemeter  $A_2$ .

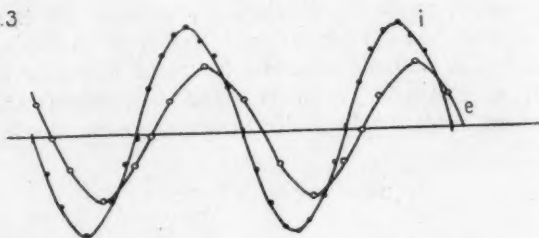
Osc. 2.



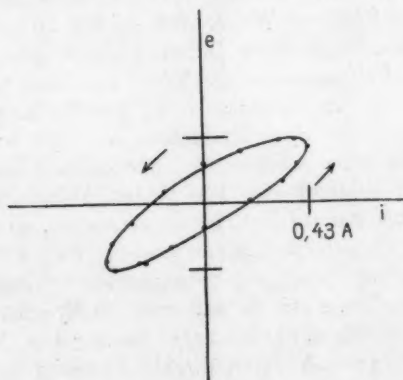
3,0 A. 9,0 mm 0,20 A<sub>eff.</sub>  
 $\varphi = 39^\circ$



Osc. 3

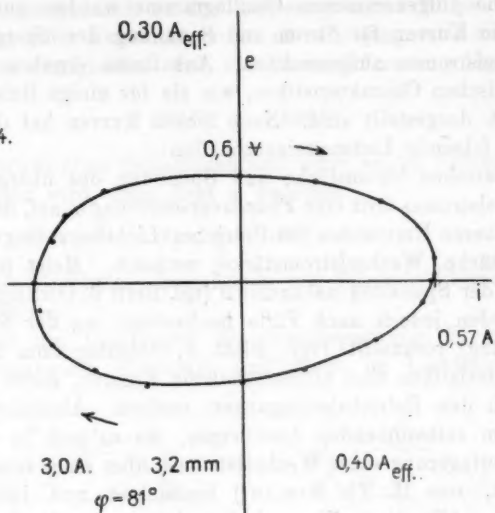


3,0 A. 0,6 mm  
 $\varphi = -28^\circ = 332^\circ$

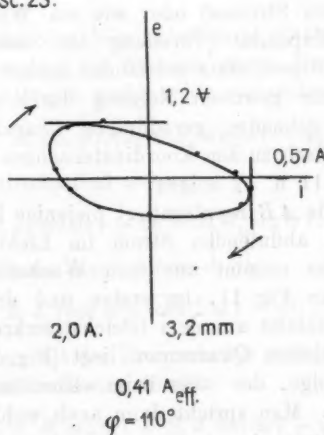


Blatt 6.

Osc. 24.



Osc. 23.



Blatt 6.

Die aufgenommenen Oszillogramme wurden ausgewertet, und die Kurven für Strom und Spannung des übergelagerten Wechselstromes aufgezeichnet. Aus ihnen ergaben sich die dynamischen Charakteristiken, wie sie für einige Beispiele auf Blatt 6 dargestellt sind. Nach diesen Kurven hat der Lichtbogen folgende Leitungseigenschaften:

Zwischen Stromstärke und Spannung des übergelagerten Wechselstromes tritt eine Phasenverschiebung  $\varphi$  auf, die je nach den näheren Umständen des Betriebes (Lichtbogenlänge, Gleichstromstärke, Wechselstromstärke) wechselt. Meist pflegt der Strom der Spannung nachzueilen (vgl. Blatt 6, Oszillogramm 2), es wurden jedoch auch Fälle beobachtet, wo der Strom der Spannung vorseilt (vgl. Blatt 6, Oszillogramm 3). Die Charakteristiken sind ellipsenähnliche Figuren, deren Neigung je nach den Betriebsbedingungen variiert. Ähnliche Kurven sind am selbsttönenden Lichtbogen, wo es sich ja ebenfalls um Überlagerung eines Wechselstromes über einen Gleichstrom handelt, von H. Th. Simon<sup>1)</sup> beobachtet und beschrieben worden. Alle diese Eigenschaften kann man in der Weise zusammenfassen, daß man sagt:

Der Lichtbogen verhält sich für die übergelagerten Wechselströme wie ein Widerstand mit vorgeschalteter Selbstinduktion (Nacheilung des Stromes) oder wie ein Widerstand mit vorgeschalteter Kapazität (Voreilung des Stromes). Man kann nämlich die Ellipsen stets entstanden denken durch Summation einer mit einer gewissen Neigung durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden geradlinigen Charakteristik  $AB$  und einer symmetrisch zu den Koordinatenachsen gelegenen Ellipse, wie die Figg. 11 u. 12 zeigen:

Die Gerade  $AB$  repräsentiert diejenige Energie, die durch den auf- und abflutenden Strom im Lichtbogen abgeliefert wird. Dieselbe stammt aus dem Wechselkreise, wenn die Gerade, wie in Fig. 11, im ersten und dritten Quadranten verläuft, sie stammt aus dem Gleichstromkreise, wenn sie im zweiten und vierten Quadranten liegt (Fig. 12). Der letztere Fall ist derjenige, der stets beim selbsttönenden Lichtbogen vorliegen muß. Man spricht dann auch wohl von einem negativen Widerstande.

1) H. Th. Simon, l. c.



Die symmetrisch zu den Achsen gelegene Ellipse  $CDEF$  entspricht einer Kapazität, wenn sie entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, die Phasendifferenz  $\varphi$  liegt dann zwischen

$$180^\circ < \varphi < 360^\circ;$$

sie entspricht einer Selbstinduktion, wenn sie im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, dann liegt  $\varphi$  zwischen

$$0 < \varphi < 180^\circ.$$

Diese Ergebnisse berechtigen uns folgende Überlegungen durchzuführen:

Liegt am Lichtbogen die Gleichspannung  $E_0$  und die Wechselspannung  $E_1 \sin \omega t$ , und fließt im Lichtbogen der

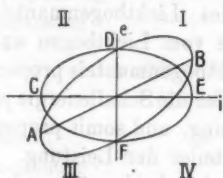


Fig. 11.

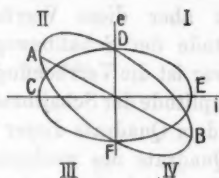


Fig. 12.

Gleichstrom  $J_0$  und der Wechselstrom  $J_1 \sin(\omega t - \varphi)$ , wo  $\varphi$  die Phasenverschiebung des Stromes gegen die Spannung ist, so ist die im Lichtbogen verbrauchte momentane Leistung:

$$(E_0 + E_1 \sin \omega t)(J_0 + J_1 \sin(\omega t - \varphi)),$$

und ihr Wechselstromanteil also:

$$J_0 E_1 \sin \omega t + E_0 J_1 \sin(\omega t - \varphi) + E_1 J_1 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi).$$

Das letzte Glied kann man umformen in:

$$\frac{1}{2} E_1 J_1 (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)),$$

es entspricht einem mit der Frequenz  $2\omega$  auf- und abflutenden Leistungsanteil; während der Anteil

$$d = J_0 E_1 \sin \omega t + E_0 J_1 \sin(\omega t - \varphi)$$

mit der halben Frequenz  $\omega$  auf- und abflutet.

In welcher Beziehung stehen diese Anteile zu der vom Lichtbogen ausgesandten Schallenergie?

Die dem Lichtbogen zugeführte Momentanleistung bestimmt das jeweilige Volumen der Lichtbogengase, indem sich ein Gleichgewicht zwischen der Ausdehnungstendenz der Dämpfe und den elektrodynamischen Kräften herstellt, die die Stromfäden zusammenzuhalten suchen (vgl. p. 648). In erster Annäherung dürfen wir das Lichtbogensvolumen dieser Leistung proportional setzen. Da wir den Lichtbogen als einen Zylinder mit unbeweglichen Endflächen aufzufassen haben, so wird einer Änderung des Zylindervolumens eine Verrückung des Zylindermantels entsprechen, so daß diese Verrückung proportional dem Amplitudenwert des über der konstanten Leistung auf und abflutenden Wechselanteils der Leistung ist. Nun bestimmt aber diese Verrückung des Lichtbogenmantels die Amplitude der Schallbewegung, die vom Lichtbogen ausgeht; und zwar ist die Verrückung des Lichtbogenmantels proportional der Amplitude der Schallbewegung, also die Schallenergie proportional dem Quadrate dieser Verrückung, und somit proportional dem Quadrate des wechselnden Anteiles der Leistung. Daher mißt das Quadrat der Amplituden der beiden überlagerten wechselnden Leistungsanteile direkt die Schallenergie des

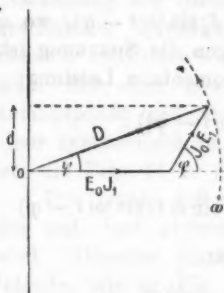


Fig. 13.

Grundtons und des 1. Obertons. Wird  $J_0 = 0$ , so fallen, da dann auch  $E_0 = 0$  ist, die beiden Glieder  $J_0 E_1 \sin \omega t$  und  $E_0 J_1 \sin(\omega t - \varphi)$  weg, und es bleibt nur das Glied mit der Frequenz  $2\omega$ , das für den 1. Oberton maßgebend ist. Wir haben hier also die strenge Erklärung der auf p. 662 beschriebenen Beobachtungen. Da das Phonometer bei der gewählten Anordnung den 1. Oberton nicht mißt, so kommt für seine Ausschläge nur:

$$d = J_0 E_1 \sin \omega t + E_0 J_1 \sin(\omega t - \varphi) = D \sin(\omega t - \psi)$$

in Betracht, dessen Amplitude  $D$  wir aus den Beobachtungen durch Vektorkonstruktion ermitteln, wie Fig. 13 zeigt. Dabei stellt sich heraus, daß bei den gewählten Verhältnissen das

Glied  $J_0 E_1$  klein ist gegen das Glied  $E_0 J_1$ , so daß in erster Annäherung der Anteil  $E_0 J_1$  der wechselnden Leistung maßgebend für die Schallintensität ist.

Diese Annäherung gilt aber nur für kleine Bogenlängen und für kleine Wechselstromamplituden. Denn die Oszillogramme lehren, daß in dem Maße, wie die Bogenlänge wächst, oder wie  $J_1$  größer wird, das zweite Glied von  $D J_0 E_1$  an Bedeutung gewinnt. Das Ergebnis der Auswertung der Oszillogramme zeigen die folgenden Tabellen.

**Bogenlänge const. 3,2 mm.**

(Wechselstrom 0,40 A<sub>eff</sub>)

Gleichstrom . . .	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	Amp.
Wechselspannung .	2,2	0,6	0,5	0,4	0,4	V <sub>max</sub> .
Gleichspannung . .	70	54	51	50	48	Volt

**Bogenlänge const. 5,8 mm.**

(Wechselstrom 0,35 A<sub>eff</sub>)

Gleichstrom . . .	2,6	3,0	4,0	5,0	6,0	Amp.
Gleichspannung . .	59	58	56	53	53	Volt
Wechselspannung .	1,5	1,2	0,7	0,6	0,5	V <sub>max</sub> .

**Bogenlänge const. 5,8 mm.**

(Wechselstrom 0,52 A<sub>eff</sub>)

Gleichstrom . . .	2,5	3,0	4,0	5,0	6,0	Amp.
Gleichspannung . .	58	56	56	53	53	Volt
Wechselspannung .	2,5	1,5	1,2	0,9	0,8	V <sub>max</sub> .

**Gleichstrom const. 3,0 Amp.**

(Wechselstrom 0,25 A<sub>eff</sub>)

Bogenlänge . . . .	5,1	7,1	10,9	mm
Gleichspannung . .	56	61	70	Volt
Wechselspannung .	0,9	1,1	2,2	V <sub>max</sub> .

**Gleichstrom const. 3,0 Amp.**

(Bogenlänge const. 5,8 mm.)

Wechselstrom . . . .	0,35	0,52	A <sub>eff</sub> .
Wechselspannung . .	1,2	1,5	V <sub>max</sub> .

Gleichstrom const. 4,0 Amp.						
(Bogenlänge const. 5,8 mm.)						
Wechselstrom . . .	0,35		0,52		A <sub>eff.</sub>	
Wechselspannung .	0,7		1,2		V <sub>max.</sub>	
Bogenlänge 3,2 mm.						
Gleichstrom . . . .	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	Amp.
Phasenverschiebung .	110°	81°	49°	46°	36°	
Gleichstrom 3,0 Amp.						
Bogenlänge . . . .	0,6	5,1	7,1	9,0	10,9	mm
Phasenverschiebung .	332°	51°	47°	39°	35°	
(-28°)						

Aus ihnen geht hervor, daß bei Vergrößerung der Wechselstromstärke  $J_1$  die Wechselspannung  $E_1$  stärker wächst als  $J_1$ , und daß bei Verlängerung des Bogens  $E_1$  stärker wächst als  $E_0$ , so daß in beiden Fällen das Glied  $J_0 E_1$  gegen das Glied  $E_0 J_1$  mehr ins Gewicht fällt.

Daß dies so sein muß, läßt sich auch aus der Betrachtung der statischen Charakteristik entnehmen. Zwar ist diese für die Wechselstromvorgänge ja nicht verantwortlich, da aber auch die dynamischen Charakteristiken stets durch die statischen bedingt erscheinen, so trifft die folgende Veranschaulichung qualitativ sicher zu.

Betrachtet man einen Punkt  $P$  der statischen Charakteristik (vgl. Fig. 14), der einem kleinen Wert der Gleichstromstärke entspricht, und denkt man sich nun über den durch  $P(J_0, E_0)$  charakterisierten statischen Zustand einen Wechselstrom gelagert, so bedeutet das, daß man auf der Charakteristik ein der Wechselstrom- bzw. Wechselspannungsamplitude entsprechendes Stück hinauf- und hinabgehen muß. Wiederholt man dies für eine zweite größere Amplitude, so sieht man, daß wegen der nach links hin zunehmenden Steilheit der Charakteristik der Zuwachs von  $E_1$  größer als der von  $J_1$  sein muß.

Im zweiten Fall, bei Vergrößerung der Bogenlänge, muß man zwei zu den betreffenden Bogenlängen gehörige statische Charakteristiken betrachten. In den normalen Fällen, wo zu

längeren Bögen steilere Charakteristiken gehören, sieht man, wie die Fig. 15 zeigt, daß  $E_1$  viel stärker wachsen kann als  $E_0$ . In dem betrachteten Beispiel wächst z. B.  $E_1$  um 50 Proz.

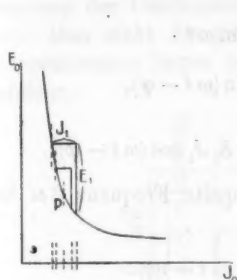


Fig. 14.

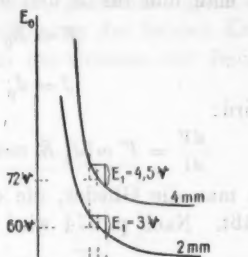


Fig. 15.

von 3 Volt auf 4,5 Volt, während  $E_0$  nur um 20 Proz. von 60 auf 72 Volt wächst.

## 2. Diskussion.

Wir wollen jetzt die vom Lichtbogen ausgesandte Schallenergie berechnen. Dazu machen wir die Annahme, daß bei konstanter Bogenlänge das Lichtbogensvolumen  $V$  nur abhängig sei von der zugeführten Leistung:

$$V = V(E \cdot J).$$

Durch die Flächeneinheit an der Oberfläche des Lichtbogens tritt, wie auf p. 650 gezeigt wurde, die Energie

$$\frac{1}{2} a \varrho_0 \dot{w}^2.$$

Durch die ganze Oberfläche  $F$  des Lichtbogens also

$$E = \frac{1}{2} a \varrho_0 \dot{w}^2 F.$$

Nun ist

$$\dot{w} = \left( \frac{du}{dt} \right)_{\max.} \quad \text{und} \quad F du = dV,$$

also

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{F} \frac{dV}{dt}.$$

Somit wird

$$E = \frac{1}{2} a \varrho_0 \frac{1}{F} \left( \frac{dV}{dt} \right)^2.$$

Nun ist

$$\frac{dV}{dt} = V' \frac{d(EJ)}{dt} = V' \left( J \frac{dE}{dt} + E \frac{dJ}{dt} \right).$$

Setzt man nun für  $E$  und  $J$  ein:

$$E = E_0 + E_1 \sin \omega t$$

und

$$J = J_0 + J_1 \sin(\omega t - \varphi),$$

so wird:

$$\frac{dV}{dt} = V' \omega [J_0 E_1 \cos \omega t + E_0 J_1 \cos(\omega t - \varphi)],$$

wenn man die Glieder, die die doppelte Frequenz  $2\omega$  haben, wegläßt. Nach p. 674 wird also:

$$\frac{dV}{dt} = V' \omega D \cos(\omega t - \psi),$$

$$E = \frac{1}{2} a \varrho_0 \frac{1}{F} (V')^2 \omega^2 D^2,$$

$$E = C \cdot \frac{V'^2 D^2}{F}.$$

Nehmen wir nun noch an — dies ist die einfachste Annahme —, daß  $V$  proportional  $E \cdot J$  sei, so wird  $V'$  konstant. Denken wir uns den Lichtbogen als einen Kreiszylinder konstanter Länge mit dem variablen Radius  $r$ , so ist sein Volumen  $V$  proportional  $r^2$ , seine Mantelfläche  $F$  proportional  $r$ , also ist

$$F \text{ proportional } \sqrt{V}$$

und somit auch

$$F \text{ proportional } \sqrt{E_0 J_0},$$

also ist:

$$E = C_1 \frac{D^2}{\sqrt{E_0 J_0}}.$$

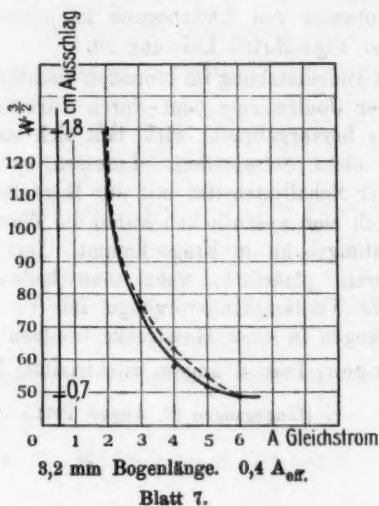
Betrachten wir nun den Fall kleiner Wechselströme, für den die auf p. 675 erwähnte Annäherung  $D = E_0 J_1$  gilt, so wird

$$E = C_1 E_0 \sqrt{\frac{E_0}{J_0}} J_1^2,$$

d. h. die Schallintensität ist proportional dem Quadrate der übergelagerten Wechselstromstärke. Dies stimmt überein mit den auf Blatt 3 gegebenen experimentellen Resultaten.

Um die Abhängigkeit der Schallintensität vom Gleichstrom zu übersehen, wurden auf Blatt 7 für einen speziellen Fall ein-

mal die experimentell gefundenen Werte der Schallintensität eingetragen (ausgezogene Kurve) und dazu in einem passend gewählten Ordinatenmaßstab die Kurve  $D^2/\sqrt{E_0 J_0}$ , wie sie die Auswertung der Oszillogramme ergab, gezeichnet (gestrichelte Kurve). Man sieht die gute Annäherung der beiden Kurven, die Abweichungen liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler.



#### Zusammenfassung.

Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Schallmessungen am tönenden Lichtbogen haben ergeben:

1. Bei konstanter Gleichstromstärke und konstanter Stromstärke des überlagerten sinusförmigen Wechselstromes wächst die Intensität des ausgesandten Schalles dem Quadrate der Bogenlänge proportional.
2. Bei konstanter Bogenlänge und konstanter Gleichstromstärke wächst die Schallintensität proportional dem Quadrate der Wechselstromstärke.
3. Bei konstanter Bogenlänge und konstanter Wechselstromstärke ändert sich mit variierender Gleichstromstärke die

Schallintensität nach demselben Gesetz, wie die Spannung des Gleichstromlichtbogens bei Variation der Gleichstromstärke (statische Charakteristik).

4. Unter Berücksichtigung der Resultate, die durch oszillographische Aufnahmen der Strom- und Spannungskurven des zugeführten Wechselstromes gewonnen wurden, ließ sich zeigen, daß diese Ergebnisse zu erwarten sind, falls man annimmt, daß das Volumen des Lichtbogens in jedem Moment proportional der zugeführten Leistung ist.

Ob die Tonentstehung im tönenden Lichtbogen durch Veränderung der Joulewärme oder durch Variation der Kohlenverdampfung hervorgebracht wird, läßt sich aus diesen Resultaten noch nicht entscheiden. Indessen spricht die starke Zunahme der Schallintensität mit der Bogenlänge sehr dafür, daß sicherlich zum wesentlichen Anteil die Wärmeentwicklung auf der Leitungsbahn in Frage kommt. Das erscheint auch von vornherein plausibel, wenn man bedenkt, wie große Trägheit die Verdampfungsvorgänge im Verhältnis zu den Wärmevergängen in einer Gasstrecke besitzen müssen.

Göttingen, Inst. f. angew. Elektrizität, Mai 1911.

(Eingegangen 23. August 1911.)

A. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 841. 842. 843. 844. 845. 846. 847. 848. 849. 850. 851. 852. 853. 854. 855. 856. 857. 858. 859. 860. 861. 862. 863. 864. 865. 866. 867. 868. 869. 870. 871. 872. 873. 874. 875. 876. 877. 878. 879. 880. 881. 882. 883. 884. 885. 886. 887. 888. 889. 890. 891. 892. 893. 894. 895. 896. 897. 898. 899. 900. 901. 902. 903. 904. 905. 906. 907. 908. 909. 910. 911. 912. 913. 914. 915. 916. 917. 918. 919. 920. 921. 922. 923. 924. 925. 926. 927. 928. 929. 930. 931. 932. 933. 934. 935. 936. 937. 938. 939. 940. 941. 942. 943. 944. 945. 946. 947. 948. 949. 950. 951. 952. 953. 954. 955. 956. 957. 958. 959. 960. 961. 962. 963. 964. 965. 966. 967. 968. 969. 970. 971. 972. 973. 974. 975. 976. 977. 978. 979. 980. 981. 982. 983. 984. 985. 986. 987. 988. 989. 990. 991. 992. 993. 994. 995. 996. 997. 998. 999. 1000.



g  
h  
e  
n